Ker et Vect affranchis

Dédou

Octobre 2010

Monotonie

Slogans

- Plus il y a de générateurs et plus il y a de combinaisons.
- Plus il y a d'équations et moins il y a de solutions.

La dimension d'un Ker

Rappel

On a bien compris que la dimension de $\text{Ker}(e_1, \cdots, e_m)$ a très envie d'être $n-m$, mais que c'est plutôt $n-r$ où r est le rang du système. Et on sait bien calculer ce rang par Gauss.

Exo 1

Pour $i := 1, 2, 3$, on note e_i l'équation aux quatre inconnues x, y, z, t : $x + iy + (i+1)z - it = 0$.
a) Explicitez e_1, e_2, e_3.
b) Donnez la dimension de deux des trois sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(e_1)$, $\text{Ker}(e_1, e_2)$, et $\text{Ker}(e_1, e_2, e_3)$,
c) Entre les deux sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(e_1)$ et $\text{Ker}(e_1, e_2, e_3)$, lequel contient l'autre ?

Affranchir un Ker

Rappel

Résoudre un système $(e_1, \cdots, e_m)$, c'est donc trouver un système résolu qui a le même Ker.

A défaut de trouver un système résolu, on serait déjà content d'avoir un système libre. Libérer $\mathrm{Ker}(e_1, \cdots, e_m)$, c'est le mettre sous la forme $\mathrm{Ker}(f_1, \cdots, f_r)$ avec $r = \mathrm{rang}\ (e_1, \cdots, e_m)$, ou, ce qui revient au même, $(f_1, \cdots, f_r)$ libre.

Exo 2

Pour $i := 1, 2, 3$, on note e_i l'équation aux quatre inconnues x, y, z, t : $x + iy + (i+1)z - it = 0$. Libérer $\mathrm{Ker}(e_1, e_2, e_3)$.

La construction Vect

Rappel

Etant donné un système $(e_1, \cdots, e_m)$ de vecteurs d'un espace vector iel E, on note $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$ ou encore $< e_1, \cdots, e_m >$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $(e_1, \cdots, e_m)$:

$$\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m) := \{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m | \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}.$$

On dit aussi que $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$ est le sous-espace (vectoriel) engendré par $(e_1, \cdots, e_m)$.

La dimension d'un vect

Rappel

On a bien compris que la dimension de $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$ a très envie d'être m, mais que c'est plutôt le rang r du système $(e_1, \cdots, e_m)$. Et on sait bien calculer ce rang par Gauss.

Exo 3

Pour $i := 1, 2, 3$, on pose $e_i := (1, i, i+1, -i)$.
a) Explicitez e_1, e_2, e_3.
b) Donnez la dimension de $\mathrm{Vect}(e_1)$, $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, et $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$,
c) Entre les deux sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(e_1)$ et $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$, lequel contient l'autre ?

Affranchir un Vect

Libérer $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$, c'est le mettre sous la forme $\mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_r)$ où r est le rang de $(e_1, \cdots, e_m)$, ou, ce qui revient au même, $(f_1, \cdots, f_r)$ libre.

Exo 4

Pour $i := 1, 2, 3$, on pose $e_i := (1, i, i + 1, -i)$.
a) Explicitez e_1, e_2, e_3.
b) Libérer $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$.

Représentations de sous-espaces vectoriels

On a maintenant quatre façons de présenter, ou représenter, ou calculer un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$:

- comme un Ker
- comme un Vect
- comme un Ker affranchi
- comme un Vect affranchi.

On va apprendre des méthodes pour passer d'une représentation à une autre.

Comment représenter sous-espace vectoriel

Ce qu'il faut trouver pour représenter un sous-espace vectoriel :

- comme un Ker : un système d'équations
- comme un Vect : un système de générateurs
- comme un Ker libéré :
  un système libre (ou minimal) d'équations
- comme un Vect libéré :
  un système libre (ou minimal) de générateurs.

Exo 5

Donnez un système libre de générateurs du plan d'équations $x = z = 0$ dans $\mathbb{R}^4$.