Applications linéaires

Dédou

Octobre 2010

Systèmes linéaires comme équations aux antécédents

On va s'habituer à interpréter par exemple le système

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 4 \\ 3x - 5y = 0 \end{array} \right.$$

comme équation aux antécédents par
$f := (x, y) \mapsto (2x + 3y, 3x - 5y)$.
Cet f est un exemple d'application **linéaire**.

Définition des fonctions linéaires

Une fonction linéaire sur $\mathbb{R}^3$ est une fonction de la forme $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$. Plus généralement :

Définition

Une fonction linéaire sur $\mathbb{R}^q$ est une application de la forme

$$(x_1, \cdots, x_q) \mapsto a_1 x_1 + \cdots + a_q x_q.$$

Exemple

$(x, y, z, t) \mapsto 2y - \pi t$ est une fonction linéaire sur $\mathbb{R}^4$.

Exo 1

Ecrivez votre fonction linéaire préférée sur $\mathbb{R}^3$.

Définition tranquille des applications linéaires

Définition

Une application linéaire de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$ est une application de la forme

$$v \mapsto (f_1(v), \cdots, f_p(v))$$

où $f_1, \cdots, f_p$ sont des fonctions linéaires sur $\mathbb{R}^q$.

Exemple

$(x, y, z, t) \mapsto (2y - \pi t, x - z, y + t)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exo 2

Ecrivez votre application linéaire préférée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Définition diabolique des applications linéaires

Proposition

Une application f de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$ est linéaire ssi elle est compatible aux trois éléments de la structure vectorielle $(0, +, .)$ au sens suivant

- compatibilité aux neutres, ou neutralité : $f(0) = 0$;
- compatibilité aux additions, ou additivité : pour v et w quelconques dans $\mathbb{R}^q$, on a $f(v + w) = f(v) + f(w)$;
- compatibilité aux multiplications, ou homogénéité : pour λ réel quelconque et v vecteur quelconque dans $\mathbb{R}^q$, on a $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Et ça se démontre !

Une application tranquille est diabolique

On le fait pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. On a donc six nombres a, b, c, a', b', c' avec

$$f := (x, y, z) \mapsto (ax + by + cz, a'x + b'y + c'z).$$

On calcule : $f(0) = (0a + 0b + 0c, 0a' + 0b' + 0c') = 0$.
Et puis, pour (x, y, z) et (x', y', z') quelconques, on a
$f((x, y, z) + (x', y', z')) = f(x + x', y + y', z + z') =$
$(ax + ax' + by + by' + cz + cz', a'x + a'x' + b'y + b'y' + c'z + c'z')$
et
$f(x, y, z) + f(x', y', z') =$
$(ax + by + cz, a'x + b'y + c'z) + (ax' + by' + cz', a'x' + b'y' + c'z') =$
$(ax + by + cz + ax' + by' + cz', a'x + b'y + c'z + a'x' + b'y' + c'z')$.
C'est bien la même chose.

Exo pour les surmotivés

Démontrez de même $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Une application diabolique est tranquille

On le fait encore pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Cette fois on sait que f est diabolique et il faut choisir six nombres a, b, c, a', b', c' et prouver

$$f = (x, y, z) \mapsto (ax + by + cz, a'x + b'y + c'z).$$

Pour (a, a') on prend $f(1, 0, 0)$.

Exo pour les surmotivés

Que prend-on pour (b, b') et (c, c') ?

On calcule $f(x, y, z) = f(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1))$
$= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1)$
$= x(a, a') + y(b, b') + z(c, c')$
$= (ax + by + cz, a'x + b'y + c'z)$.
Cqfd.

La formulation synthétique

Proposition

Une application $f : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est linéaire ssi elle vérifie la condition suivante :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathbb{R}^q, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Cette condition regroupe en une seule les trois conditions de la définition diabolique.
Et ça se démontre !

La condition est nécessaire

Si f est linéaire, on a, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tous $u, v \in \mathbb{R}^q$

$$f(\lambda u + \mu v) = f(\lambda u) + f(\mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

par additivité et homogénéité de f.

La condition est suffisante

On a f "synthétique" et on doit montrer trois choses.

- Neutralité. On a $f(0) = f(0.0 + 0.0) = 0f(0) + 0f(0) = 0$.
- Additivité. Pour u et v quelconques dans $\mathbb{R}^q$, on a $f(u + v) = f(1.u \ + \ 1.v) = 1.f(u) + 1.f(v) = f(u) + f(v)$.
- Homogénéité.

Exo pour les surmotivés

Traîtez ce cas.