

Bases de Kers

Dédou

Octobre 2010

Le problème

- On est dans \mathbb{R}^n ,
- on a un système (e_1, \dots, e_m) d'équations linéaires homogènes et
- on cherche une base du sous-espace vectoriel des solutions $\text{Ker}(e_1, \dots, e_m)$.

Un exemple

Exemple

Comme base du sous-espace vectoriel des solutions du système aux quatre inconnues x, y, z, t

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

on peut prendre $((9, 9, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.

Exo 1

Donnez une base du sous-espace vectoriel des solutions du système aux quatre inconnues x, y, z, t

$$\begin{cases} y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Le cas résolu : exemple

Considérons d'abord un système résolu des deux équations e_1, e_2 à quatre inconnues :

$$\begin{cases} y = 2x + 3t \\ z = 5x + 7t \end{cases} .$$

Les solutions s'écrivent

$$(x, 2x + 3t, 5x + 7t, t) \quad \text{ou encore} \quad x(1, 2, 5, 0) + t(0, 3, 7, 1).$$

Ce sont les combinaisons linéaires de $(1, 2, 5, 0)$ et $(0, 3, 7, 1)$.

Le cas résolu : moralité

L'ensemble des combinaisons linéaires de $(1, 2, 5, 0)$ et $(0, 3, 7, 1)$, c'est $\text{Vect}((1, 2, 5, 0), (0, 3, 7, 1))$ et ça admet $((1, 2, 5, 0), (0, 3, 7, 1))$ comme base.

Moralité : pour un système résolu, une base du sous-espace vectoriel des solutions est en évidence.

Exo 2

Donnez une base du sous-espace vectoriel des solutions du système aux quatre inconnues x, y, z, t

$$\begin{cases} x = y + 2z \\ t = -y - 3z \end{cases}$$

Le cas résolu : le problème du rang

Dans le cas résolu, les générateurs trouvés forment bien toujours un système libre. Pour le voir regardons un exemple où les inconnues principales sont les dernières :

$$\begin{cases} t = 2x + 3y + 6z \\ u = 5x + 7y - 2z \\ v = 4x + 9y - 3z \end{cases} .$$

Les solutions génératrices en évidence sont

$$\begin{aligned} & (1, 0, 0, 2, 5, 4) \\ & (0, 1, 0, 3, 7, 9) \\ & (0, 0, 1, 6, -2, -3) \end{aligned} .$$

Cette matrice est bien de rang trois (échelonnée).

Le cas général

Pour le cas général, trop facile, on fait une résolution, ce qui nous ramène au cas résolu.

Exo 3

Donnez une base du sous-espace vectoriel des solutions du système aux quatre inconnues x, y, z, t

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + 3z - t = 0 \end{cases}$$