Bases

Dédou

Octobre 2010

Base d'un sous-espace vectoriel

Définition

Une base d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, c'est un système générateur libre de ce sous-espace vectoriel .

Comme sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on a $\mathbb{R}^n$ tout entier, donc

Définition

Une base de $\mathbb{R}^n$, c'est un système générateur libre de $\mathbb{R}^n$.

Bases de $\mathbb{R}^2$: exemples

Exemples

Comme base de $\mathbb{R}^2$, on a la base canonique $((1,0),(0,1))$ mais y en a plein d'autres, comme $((2,3),(4,5))$.

Ca s'écrit aussi en colonnes et ça se dessine.

Toutes les bases de $\mathbb{R}^2$

Proposition

a) Tout système de deux vecteurs non proportionnels de $\mathbb{R}^2$ en est une base.
b) Inversement toute base de $\mathbb{R}^2$ est constituée de deux vecteurs (non proportionnels).

Et ça se démontre. Mais nous, est-ce qu'on a le temps ?

Exo pour les surmotivés, à rendre en td

a) Démontrez a).
b) Démontrez b).

Bases de $\mathbb{R}^3$

Proposition

a) Tout système libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ en est une base.
b) Inversement toute base de $\mathbb{R}^3$ est constituée de trois vecteurs formant un système de rang trois.

Et ça se démontre. Mais nous, est-ce qu'on a le temps ?

Exo pour les surmotivés, à rendre en td

a) Démontrez a).
b) Démontrez b).

Exo 0 à consommer de suite

Donnez une base de $\mathbb{R}^3$.

Bases triangulaires supérieures de $\mathbb{R}^3$

Le système

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

est une base de $\mathbb{R}^3$, puisque son rang est 3 (il est échelonné).

Bases triangulaires inférieures de $\mathbb{R}^3$

Le système

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

est une base de $\mathbb{R}^3$, sa matrice est triangulaire (inférieure).

Bases faciles de $\mathbb{R}^3$ I

Le système

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

est une base de $\mathbb{R}^3$, car son rang est trois (facile).

Bases faciles de $\mathbb{R}^3$ II

Le système

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

est une base de $\mathbb{R}^3$, car son rang est trois (facile).

Bases de $\mathbb{R}^n$

Proposition

a) Tout système libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ en est une base.
b) Inversement toute base de $\mathbb{R}^n$ est constituée de n vecteurs formant un système libre.

Et ça se démontre. Mais nous, on n'a pas le temps.

Bases canoniques

Proposition

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ en est bien une base.

Et ça se démontre. Et là, on prend le temps ?

Dégraisser en base : le problème

Problème

On a un système générateur d' un sous-espace vectoriel, et on veut extraire de ce système une base.

Réponse

C'est toujours possible :
on élimine l'un après l'autre ceux des vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres.
Quand on a fini, le système obtenu est encore générateur de E, et en plus il est libre, donc c'est une base de E.

Dégraisser en base : exemple

Exemple

On pose $E := \text{Vect}((1,0,0,0),(1,1,0,1),(0,1,0,1))$. On voit que le deuxième vecteur est la somme des deux autres, qui ne sont pas proportionnels. Donc E est de dimension 2 et admet $((1,0,0,0),(0,1,0,1))$ pour base.

Exo 1

Donnez deux autres bases de cet E.

Dégraisser en base : exo

Exo 2

On pose $E := \mathrm{Vect}((1,6,2,4),(0,3,0,2),(2,0,4,0))$. Extrayez de $((1,6,2,4),(0,3,0,2),(2,0,4,0))$ deux bases de E.

Bases dégraissées : conclusion

On le dit autrement :
Quand on a un système générateur d'un sous-espace vectoriel E, pour en extraire une base, c'est facile :
on selectionne les vecteurs l'un après l'autre en ne gardant que ceux qui font augmenter le rang.

Engraisser en base : le problème

Problème

On a un système libre d' un sous-espace vectoriel E, et on veut compléter ce système en une base de E.

Réponse

C'est toujours possible :
on ajoute l'un après l'autre des vecteurs de E qui ne sont pas combinaisons linéaires des autres.
Quand on a fini, le système obtenu est encore libre de E,
et en plus il est générateur, donc c'est une base de E.

Problème

Mais où chercher ces vecteurs qu'on ajoute ?

Réponse

Il suffit de puiser dans une base de E.

Comment engraisser un système libre

On le dit autrement :
Quand on a un système libre d'un sous-espace vectoriel E, pour trouver des vecteurs de E qui augmentent le rang du système, il suffit de les prendre dans une base de E.
Par exemple, si e_1 et e_2 sont deux vecteurs non proportionnels d'un sous-espace vectoriel E qui admet (b_1, b_2, b_3) comme base, alors l'un des trois systèmes

$$(e_1, e_2, b_1) \quad \text{ou} \quad (e_1, e_2, b_2) \quad \text{ou} \quad (e_1, e_2, b_3)$$

est une base de E.

Engraisser en base : exemple

Exemple

On pose $E := \mathrm{Vect}((1,1,1),(0,2,2)$. On peut complèter d'un tas de façons $(0,1,1)$ en une base de E, notamment par ajout de $(1,1,1)$, ou par ajout de $(0,2,2)$.

Bases engraissées : exo

Exo 3

Complètez $((1,1,1),(0,1,1))$ de deux façons en une base de $\mathbb{R}^3$.

Comment engraisser un système libre

Quand on a un système libre d'un sous-espace vectoriel E,
pour trouver des vecteurs de E qui augmentent le rang du système,
il suffit de les prendre dans une base de E.
Par exemple, si e_1 et e_2 sont deux vecteurs non proportionnels d'un sous-espace vectoriel E qui admet (b_1, b_2, b_3) comme base, alors l'un des trois systèmes

$$(e_1, e_2, b_1) \quad \text{ou} \quad (e_1, e_2, b_2) \quad \text{ou} \quad (e_1, e_2, b_3)$$

est une base de E.

Bases engraissées : conclusion

On le dit autrement :
Quand on a un système libre d'un sous-espace vectoriel E,
pour le compléter en une base de E, c'est facile :
on lui ajoute l'un après l'autre les vecteurs d'une base de E, en ne gardant que ceux qui font augmenter le rang.

Le théorème de la base incomplète

On le dit encore autrement :

Théorème

Tout système libre peut être complété en une base par ajout de vecteurs choisis dans une base donnée.

Le cas de $\mathbb{R}^2$

Pour compléter un vecteur non nul v de $\mathbb{R}^2$ en une base de $\mathbb{R}^2$, on peut prendre le vecteur qui manque dans la base canonique, autrement dit prendre $(1, 0)$ ou $(0, 1)$.

Exo 5

a) Donnez un vecteur v qu'on ne peut compléter en une base qu'avec $(1, 0)$.
b) Donnez-en qu'on peut compléter en une base avec les deux vecteurs de la base canonique.

Compléter une base de $\mathbb{R}^n$

Pour compléter une base de $\mathbb{R}^n$, on peut prendre les vecteurs qui manquent dans la base canonique.

Exo 4

Complétez $(1, 2, 0)$ en une base de $\mathbb{R}^3$ par ajout de vecteurs de la base canonique.