Calcul matriciel

Dédou

Décembre 2010

Matrices colonnes

Les matrices à une seule colonne s'appellent matrices-colonnes.
Les matrices à une seule ligne s'appellent matrices-lignes.
On peut voir les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ comme des matrices-colonnes (ou comme des matrices lignes).

Image par une application linéaire

Soit l'application linéaire
$f := (x, y, z) \mapsto (3x + 5y + 7z, 2x + 2y + 2z)$. Sa matrice est

$$M_f = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et on a

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 5y + 7z \\ 2x + 2y + 2z \end{pmatrix}.$$

Recette : pour calculer $f(v)$

on multiplie (du bon côté) la matrice de f par la colonne de coordonnées de v.

Exemple

Exemple

L'image du vecteur $v := (3, 2)$ par l'application linéaire de matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

est

$$w := \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice

Exo 1

Calculez l'image du vecteur $(1, 2, 3)$ par l'application linéaire de matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rappel : le sens de la multiplication des matrices

Rappel

a) La matrice de la composée de deux applications linéaires est le produit des matrices.
b) L'application linéaire associée à un produit de matrices est la composée des applications linéaires associées.

Bonus

On vient de voir que la multiplication des matrices encode aussi l'application d'une application linéaire à un vecteur.

Associativité : exemple

Soit g de matrice $G := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, f de matrice $F := \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $V := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a

$$(g \circ f)(3,2,1) = (GF)V$$

parce que GF est la matrice de $g \circ f$, et on a aussi

$$(g \circ f)(3,2,1) = G(FV)$$

parce que $(g \circ f)(3,2,1) = g(f(3,2,1))$.
On a donc $(GF)V = G(FV)$.

Associativité

Proposition

Si A a autant de colonnes que B de lignes et
B autant de colonnes que C de lignes,
alors les deux produits $(AB)C$ et $A(BC)$ sont bien définis et égaux.

On les écrit tous les deux ABC.
Et ça se prouve !

Commutativité

Pas de commutativité

Si A a autant de colonnes que B de lignes,
alors B n'a pas forcément autant de colonnes que B a de lignes,
mais même si c'est le cas, on n'a pas forcément $AB = BA$.

Commutativité : exemple 1

Exemple

$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

AB a un sens mais BA n'en a pas.

Commutativité : exemple 2

Exemple

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Distributivité : exemple

Exemple

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C := A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = (A+B)(A+B) = A(A+B)+B(A+B) = A^2+AB+BA+B^2$$

$$C^2 = (A+B)(A+B) = (A+B)A+(A+B)B = A^2+BA+AB+B^2.$$

Distributivité : cas général

Proposition

Si A et B ont autant de colonnes que C et D ont de lignes, on a

$$(A+B)C = AC + BC, \qquad B(C+D) = BC + BD$$

$$(A+B)(C+D) = AC + BC + AD + BD.$$

Matrices nulles

Il y a tout un tas de matrices “nulles”, celles où tous les coefficients sont nuls. On les note toutes 0.
On a

$$A + 0 = A, \qquad 0 + A = A$$

chaque fois que ça a un sens.

Les deux multiplications : exemple

Exemple

$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $(2A)B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2(AB)$, $A(3B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 3AB$.

Les deux multiplications : cas général

Proposition

Si le produit AB a un sens, et λ et μ sont deux nombres, on a

$$(\lambda A)(\mu B) = (\lambda(\mu(AB) = (\lambda\mu)AB.$$

On écrit juste

$$\lambda\mu AB.$$

Multiplication à gauche et combinaisons linéaires

Proposition

Soit A une matrice à p lignes et q colonnes. Alors l'application $B \mapsto AB$ qui envoie $M_{q,r}$ dans $M_{p,r}$ est linéaire.

Autrement dit, on a

$$A(\lambda B + \lambda' B') = \lambda AB + \lambda' AB'.$$

Exo 2

Donnez l'énoncé correspondant pour la multiplication par A à droite.

Matrice unité : exemple

La matrice unité (en dimension 2) c'est

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prenons $B := \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

On trouve $IB := \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ et $BI = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

C'est normal !

Matrice unité : cas général

La matrice unité (en dimension n) c'est

la matrice I_n de l'identité de $\mathbb{R}^n$.

Proposition

Si la matrice A a n lignes, le produit I_nA vaut A ;
si elle a n colonnes, le produit AI_n vaut A.
et donc, si A est carrée à n lignes et n colonnes, on a

$$I_nA = AI_n = A.$$

Matrice carrée inversible : exemple

Prenons la matrice de la rotation d'angle a,
$A := \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$, et celle de la rotation d'angle $-a$,
$B := \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$.
On a

$$AB = \begin{pmatrix} \cos^2 a + \sin^2 a & \cos a \sin a - \sin a \cos a \\ \sin a \cos a - \sin a \cos a & \cos^2 a + \sin^2 a \end{pmatrix} = I$$

et pareil pour BA.

Matrice carrée inversible : définition

Proposition

Si le produit de deux matrices carrées A et B de même taille vaut I alors elles commutent : $BA = AB = I$.

Définition

On dit qu'une matrice carrée A est inversible s'il existe une matrice carrée de même taille B vérifiant
$AB = I$ et $BA = I$ (une seule des deux égalités suffit). On dit alors que B est un inverse de A.

En réalité A ne peut avoir qu'un seul inverse ; on dit alors que c'est l'inverse de A, et on le note A^{-1}.

Matrice carrée inversible : exemple

Exemple

La matrice $\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est $\begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$.

Applications réciproques

Définition

Soit $f : I \to J$ une application entre deux ensembles (par exemple deux intervalles), et $g : J \to I$ une application dans l'autre sens. On dit que g est la réciproque de f si pour tout x dans I et tout y dans J, on a

$$y = f(x) \quad ssi \quad x = g(y).$$

Exemple

La fonction ln $:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est la réciproque de l'exponentielle $exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$.

Exo 3

De quelle application la fonction racine carrée est-elle la réciproque ?

Inverse et réciproque, même combat

Proposition

Deux matrices carrées A et B de même taille n sont inverses l'une de l'autre ssi les applications linéaires associées sont réciproques.

Montrons seulement que la condition est suffisante : soient donc X et Y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si on a $Y = AX$, en multipliant (à gauche !) par B, on obtient $BY = X$. Réciproquement, si on a $X = BY$, on obtient $AX = Y$ en multipliant par A (toujours à gauche).

Calcul d'inverse : exemple

Exemple

Calculons l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Pour cela, on calcule la réciproque de l'application linéaire associée en résolvant le système

$$\begin{cases} x + 2y = x' \\ 3x + 5y = y'. \end{cases}$$

Par combinaison linéaire, on trouve

$$\begin{cases} x = -5x' + 2y' \\ y = 3x' - y'. \end{cases}$$

L'inverse cherché est donc $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Calcul d'inverse : slogan

Slogan

Pour calculer l'inverse de la matrice A, on résout le système $AX = X'$, où X est le vecteur inconnu.

Calcul d'inverse : exercice

Exo 4

Calculez l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Calcul d'inverse : exemple

Exemple

Soit A une matrice carrée de taille 2 vérifiant

$$A^2 - 2A - 3I = 0.$$

On a

$$A^2 - 2A = A(A - 2I) = 3I$$

et donc

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I).$$

Calcul d'inverse : exercice

Exo 5

Calculez l'inverse de la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ sachant qu'elle vérifie

$$A^2 - 5A - 2I = 0.$$

Critère d'inversibilité : exemple

On a compris que la matrice $A := \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible quand le système

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y = x' \\ 3x + 4y = y'. \end{array} \right.$$

aux inconnues x et y a une unique solution.
C'est le cas exactement quand la matrice A est de rang 2. Et c'est général.

Critère d'inversibilité : cas général

Exo 6

Calculez l'inverse de la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ sachant qu'elle vérifie
$$A^2 - 5A - 2I = 0.$$

Proposition

Une matrice carrée de taille n est inversible ssi son rang est n.

Critère d'inversibilité : exercice

Exo 7

Décidez si la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \\ 5 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ est inversible.

Interpolation

Problème

Montrer qu'il existe un unique trinôme du second degré P vérifiant :

$$P(1) = 4,\ P(2) = 1,\ P(5) = 7.$$

Solution

On considère l'application $ev := P \mapsto (P(1), P(2), P(5)$. Il s'agit de résoudre une équation aux antécédents par ev. On écrit la matrice canonique de cette application linéaire, c'est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}$$

Son rang est 3 donc elle est inversible et le systéme a une unique solution.

Interpolation : exercice

Exo 8

Décidez si la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \\ 5 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ est inversible.