Composition des applications linéaires

Dédou

Novembre 2010

Exemple de composition

Exercice résolu

Calculez la composée $g \circ f$ avec

$$g := (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}, \; f := (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 3x + 5y + 7z \\ 2x + 2y + 2z \end{pmatrix}.$$

Solution

On calcule

$$\begin{aligned}
&(g \circ f)(x, y, z) \\
&= (g(f(x, y, z)) && \text{(par définition de la composition)} \\
&= g(3x + 5y + 7z, 2x + 2y + 2z) && \text{(par définition de } f\text{)} \\
&= (5x + 7y + 9z, x + 3y + 5z) && \text{(par définition de } g\text{).}
\end{aligned}$$

La composée $g \circ f$ est donc

$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 5x + 7y + 9z \\ x + 3y + 5z \end{pmatrix}.$$

Exercice

Exo 1

Calculez la composée $g \circ f$ avec

$$g := (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{pmatrix}, \ f := (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 3x + 3y + 3z \\ 2x + 4y + 6z \end{pmatrix}.$$

Linéarité de la composition : énoncé

Proposition

La composée de deux applications linéaires est encore linéaire.

Plus formellement, ça se lit :

$$\forall p, q, r \in \mathbb{N}, \forall f \in L_{q,r}, \forall g \in L_{p,q}, \quad g \circ f \quad \text{est linéaire.}$$

Linéarité de la composition : preuve

Soient p, q, r trois entiers, f dans $L_{q,r}$ et g dans $L_{p,q}$. Pour montrer que $g \circ f$ est linéaire, il faut montrer :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathbb{R}^r, \quad (g \circ f)(\lambda u + \mu v) = \lambda (g \circ f)(u) + \mu (g \circ f)(v).$$

On a $(g \circ f)(\lambda u + \mu v)$

$$\begin{aligned}
&= g(f(\lambda u + \mu v)) && \text{(par définition de la composition)}\\
&= g(\lambda f(u) + \mu f(v)) && \text{(par linéarité de } f\text{)}\\
&= \lambda g(f(u)) + \mu g(f(v)) && \text{(par linéarité de } g\text{)}\\
&= \lambda (g \circ f)(u) + \mu (g \circ f)(v) && \text{(par définition de la composition).}
\end{aligned}$$

Carte de visite des compositions

On rappelle que $L_{p,q}$ désigne l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$.

$$\begin{array}{rccl} \circ_{p,q,r} : & L_{p,q} \times L_{q,r} & \longrightarrow & L_{p,r} \\ & (g, f) & \longmapsto & g \circ f \\ & (g, f) & \longmapsto & (v \mapsto g(f(v)). \end{array}$$

Et il faut voir ça comme suit :

$$\mathbb{R}^r \xrightarrow{f} \mathbb{R}^q \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p.$$

Surcharge pour les compositions

Notation

On note toutes les compositions d'applications avec le seul signe $\circ$.

Exo 2

Sachant que h est dans $L_{p,q}$ et f dans $L_{r,s}$, dites quelles sont les compositions (linéaires) figurant dans la formule d'associativité

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Associativité de la composition : énoncé

Proposition

La composition des applications linéaires est associative.

Plus formellement, ça se lit :

$$\forall p, q, r, s \in \mathbb{N}, \forall h \in L_{p,q}, \forall g \in L_{q,r}, \forall f \in L_{r,s}, \ (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Associativité de la composition : démonstration

$$\forall p,q,r,s \in \mathbb{N}, \forall h \in L_{p,q}, \forall g \in L_{q,r}, \forall f \in L_{r,s},\ (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Preuve

Soient p, q, r, s, f, g, h comme dans l'énoncé. On doit montrer $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ autrement dit $\forall u \in \mathbb{R}^s, ((h \circ g) \circ f)(u) = (h \circ (g \circ f))(u)$. Soit donc u quelconque dans $\mathbb{R}^s$. Par définition de la composition, on a $((h \circ g) \circ f)(u) = (h \circ g)(f(u)) = h(g(f(u)))$.
Et de même $(h \circ (g \circ f))(u) = h((g \circ f)(u)) = h(g(f(u)))$.
On a donc bien $((h \circ g) \circ f)(u) = (h \circ (g \circ f))(u)$.
Cqfd.