Rétrospective

Dédou

Décembre 2010

Systèmes numériques et équations vectorielles

On a compris qu'un système de plusieurs égalités numériques est équivalent à une unique égalité vectorielle.

Exemple

Le système numérique

$$\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ 3x + 7y = 8. \end{cases}$$

est équivalent à l'équation vectorielle

$$x(2,3) + y(4,7) = (5,8).$$

Exo 1

Traduire en système numérique l'égalité vectorielle

$$x(1,2) + y(3,4) = (5,6).$$

Systèmes linéaires et recherche d'antécédents

On a compris qu'un système d'équations linéaires s'interprète comme équation aux antécédents par une application linéaire.

Exemple

L'équation aux antécédents de $(1,2)$ par $(x,y,z) \mapsto (3x+4y, 5y+6z)$ s'écrit

$$\begin{cases} 3x+4y=1 \\ 5y+6z=2. \end{cases}$$

Exo 2

Interpréter le système suivant comme équation aux antécédents :

$$\begin{cases} 2x+4y=5 \\ 3x+7y=8. \end{cases}$$

Systèmes linéaires homogènes et noyau

L'ensemble des antécédents de 0 par l'application linéaire f s'appelle noyau de f.

Exo 3

Interprètez comme noyau l'ensemble des solutions du système à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 5y + 6z = 0. \end{cases}$$

Existence : le cas incompatible

Le problème de l'existence de solution ne se pose pas pour les systèmes homogènes, qui ont toujours la solution 0.
Tandis qu'un système inhomogène peut ne pas avoir de solutions.

Exo 4

Donnez un système de deux équations linéaires à deux inconnues qui n'a pas de solution.

Existence et surjectivité

Le cas facile pour l'existence,

c'est quand l'application f est surjective.

La surjectivité

Définition

l'application $f : E \to F$ est dite surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent par f, autrement dit si son image est F tout entier.

Exemple : l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} := x \mapsto x^3$ est surjective

tout réel admet une racine cubique.

Exemple : l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} := x \mapsto x^2$ n'est pas surjective

les réels négatifs n'admettent pas de racine carrée. Son image est $[0, +\infty[$ et non pas $\mathbb{R}$ tout entier.

Exo 5

Donnez un autre exemple d'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas surjective.

Surjectivité et rang des applications linéaires

Proposition

Soit $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire . Alors f est surjective ssi son rang est égal à p.

Rappel

Le rang de $f : E \to F$, c'est la dimension de son image.

Méthode de calcul

Le rang de f est égal au rang de sa matrice dans n'importe quelles bases.

Unicité et injectivité

On s'intéresse maintenant à l'unicité de la solution de notre équation aux antécédents $f(x) = a$.

Le cas facile pour l'unicité,

c'est quand l'application f est injective.

L'injectivité

Définition

l'application $f : E \to F$ est dite injective si tout élément de F admet au plus un antécédent par f.

Exemple : l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} := x \mapsto x^3$ est injective

tout réel admet une seule racine cubique.

Exemple : l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} := x \mapsto x^2$ n'est pas injective

les réels positifs admettent deux racines carrées.

Exo 6

Donnez un autre exemple d'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas injective.

Injectivité des applications linéaires

Proposition

Soit $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Alors f est injective ssi son noyau est $\{0\}$.

Remarque

La condition est évidemment nécessaire puisque le noyau est l'ensemble des antécédents de 0.

Dimension du noyau

a) L'application linéaire $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ est injective ssi le rang de f est égal à q.
b) Plus précisément, la dimension du noyau de f s'obtient en retranchant à q le rang de f.

Le principe de résolution linéaire

L'ensemble des solutions d'un système linéaire compatible à n inconnues est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$.
Le sous-espace vectoriel parallèle (associé) est l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Exemple

L'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 5y + 6z = 11 \end{cases}$$

est la parallèle passant par $(1, 1, 1)$ à la droite d'équations $3x + 4y = 0$ et $5y + 6z = 0$.

Exo 7

Identifiez de même l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4y + 5z = 5. \end{cases}$$

La même avec d'autres mots

Principe de résolution linéaire

On obtient toutes les solutions d'un système linéaire en ajoutant à l'une de ses solutions n'importe quelle solution du système homogène associé.

Variante faible

La différence entre deux solutions d'un système linéaire est solution du système homogène associé.

Exo 8

Trouver une solution à coordonnées valant 1 ou -1 du système

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$$

et une du système homogène associé. En déduire une deuxième solution du système non-homogène.

Encore d'autres mots

Moralité

Pour résoudre un système inhomogène, il suffit de trouver une solution et de résoudre le système homogène associé.

Moralité bis

Les espaces de solutions d'un système linéaire compatible et de son système homogène associé ont la même dimension.

Moralité ter

Pour la dimension de l'espace des solutions, on peut se restreindre aux systèmes homogènes.

Le cas de l'équation linéaire générale

Tout ce qu'on a vu pour une équation aux antécédents par $f : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$

s'adapte au cas plus géneral d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ entre deux espaces vectoriels généraux.

C'est ça qu'on va essayer d'illustrer sur un exemple.

Un problème de décomposition

Problème

J'ai un polynôme P, par exemple $X^3 + 2X + 3$. Je veux savoir si on peut mettre P sous la forme $(X+1)P_1 + (X^2+1)P_2$ et, si oui, de combien de façons différentes.

Interprétation comme équation aux antécédents

On cherche P_1 et P_2 avec $P = (X^2+1)P_1 + (X+1)P_2$. Comme P est de degré 3, on va se contenter de chercher P_1 de degré 1 et P_2 de degré 2. Si on note Pol_d l'ensemble des polynômes de degré au plus d, notre affaire s'interprète comme équation aux antécédents par l'application

$$\begin{array}{rccc} Comb: & Pol_1 \times Pol_2 & \to & Pol_3 \\ & (P_1, P_2) & \mapsto & (X^2+1)P_1 + (X+1)P_2 \end{array}$$

Les opérations dans Pol_d

L'addition dans Pol_d est comme suit

$$\begin{array}{rccl} Add : & Pol_d \times Pol_d & \longrightarrow & Pol_d \\ & (P_1, P_2) & \longmapsto & (x \mapsto P_1(x) + P_2(x)) \end{array}$$

Exo 9

Quelle est la multiplication externe dans Pol_d ?

Définition d'espace vectoriel

Un espace vectoriel c'est

- un ensemble V
- plus une opération interne sur V appelée addition
- plus une opération externe $mult : \mathbb{R} \times V \to V$
- vérifiant une longue liste d'axiomes pas étonnants (genre pour tout $v, 1.v = v$).

Le cas de Pol_d

Les opérations qu'on a dites pour Pol_d vérifie les axiomes qu'il faut, de sorte que Pol_d un espace vectoriel.
Ca n'a rien d'étonnant !

Avec sa base $(1, X, ..., X^d)$

Pol_d, c'est quasiment $\mathbb{R}^{d+1}$.

Les opérations dans $Pol_1 \times Pol_2$

L'addition dans $Pol_1 \times Pol_2$

$$\begin{array}{rccl} Add: & (Pol_1 \times Pol_2) \times (Pol_1 \times Pol_2) & \rightarrow & (Pol_1 \times Pol_2) \\ & ((P_1, P_2), (P'_1, P'_2)) & \mapsto & (P_1 + P'_1, P_2 + P'_2) \end{array}$$

Exo 10

Quelle est la multiplication externe dans $Pol_1 \times Pol_2$?

Ces opérations font de $Pol_1 \times Pol_2$ un espace vectoriel.

La base canonique de $Pol_1 \times Pol_2$

- Pol_1 c'est quasiment $\mathbb{R}^2$
- Pol_2 c'est quasiment $\mathbb{R}^3$
- $Pol_1 \times Pol_2$ c'est quasiment $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$
- autrement dit, c'est quasiment $\mathbb{R}^5$.
- Comme base canonique de $Pol_1 \times Pol_2$, on prend $((1,0),(X,0),(0,1),(0,X),(0,X^2))$.

Exo 11

Quelles sont les coordonnées de $(2X+3, 4X^2-1)$ dans cette base canonique ?

La linéarité de *Comb*

Si *Comb* est linéaire, on peut écrire sa matrice canonique.

$$\begin{array}{rccl} Comb : & Pol_1 \times Pol_2 & \rightarrow & Pol_3 \\ & (P_1, P_2) & \mapsto & (X^2+1)P_1 + (X+1)P_2 \end{array}$$

Exo 12

Ecrire cette matrice.

Existence et surjectivité

On s'intéresse donc à l'équation aux antécédents $Comb(P_1, P_2) = P$.

Le cas facile pour l'existence,

c'est quand l'application, ici *Comb*, est surjective.

Surjectivité et rang des applications linéaires

Proposition

Soit $f : E \to F$ une application linéaire (avec F de dimension finie). Alors f est surjective ssi son rang est égal à la dimension de F.

Définition

Le rang de $f : E \to F$, c'est la dimension de son image.

Méthode de calcul

Le rang de f est égal au rang de sa matrice dans n'importe quelles bases.

Exo 13

Calculer le rang de *Comb*. Que peut-on en déduire pour notre problème ?

Unicité et injectivité

On sait maintenant que notre équation aux antécédents $Comb(P_1, P_2) = P$ a une solution et on s'intéresse à l'unicité.

Le cas facile pour l'existence,

c'est quand l'application, ici *Comb*, est injective.

Injectivité des applications linéaires

Proposition

Soit $f : E \to \mathbb{F}$ une application linéaire. Alors f est injective ssi son noyau est $\{0\}$.

Méthode de calcul

a) L'application linéaire $f : E \to F$ est injective ssi le rang de f est égal à la dimension de E.
b) Plus précisément, la dimension du noyau de f s'obtient en retranchant le rang de f à la dimension de E.

Exo 14

Quelle est la dimension du noyau de *Comb* ?

Défaut d'unicité

Quand on connaît une solution d'un problème linéaire, on peut en déduire toutes les autres par le résultat suivant.

Proposition

Soit $f : E \to F$ une application linéaire, et a un élément de E, avec $b = f(a)$. Alors :
a) pour tout élément v de $Kerf$, $a + v$ vérifie aussi $f(a + v) = b$;
b) inversement,toute solution de $f(x) = b$ s'écrit $a + v$ avec v dans $Kerf$.

Slogan : on obtient la solution générale d'un problème linéaire

en ajoutant à une solution particulière la solution générale du problème homogène associé.

Rappel

Le noyau $Kerf$ est l'ensemble des solutions du problème homogène $f(v) = 0$.

Le cas de *Comb*

Pour notre $Comb : E \rightarrow F$, on a
$dimKerf = dimE - rangComb = 5 - 4 = 1.$
On a $Kerf =< (X + 1, -X^2 - 1) >$. En effet, on a bien

$$Comb(X + 1, -X^2 - 1) = (X^2 + 1)(X + 1) - (X + 1)(X^2 + 1) = 0.$$

Pour finir, l'exemple des primitives

La dérivation est une application linéaire Der de l'espace vectoriel des fonctions dérivables dans celui de toutes les fonctions.

Le noyau de Der est l'espace des fonctions constantes (c'est une droite).

Une primitive de la fonction cosinus est un antécédent de cos par Der.

On obtient toute primitive du cosinus en ajoutant à l'une d'entre elles (par exemple la fonction sinus) un élément du noyau, c'est-à-dire une constante.