# Dimension des sous-espaces

Dédou

Octobre 2010

# Dimension des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

**Définition**

La dimension d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, c'est le nombre minimal de vecteurs dans un système de générateurs de ce sous-espace.

# La fausse formule des dimensions

## L'idée

La dimension du sous-espace vectoriel des solutions d'un système de deux équations homogènes à six inconnues, c'est le nombre d'inconnues secondaires, ça devrait être 4.

Dimension (du sev des solutions) $=$
nombre d'inconnues -nombre d'équations.

Mais c'est faux ! il ne faut pas compter naïvement les équations.

## Exo 1

Donnez un exemple de système de trois équations homogènes à quatre inconnues dont l'ensemble des solutions est un plan.

# Dimension des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

## Bonne définition

La dimension du sous-espace vectoriel des solutions d'un système d'équations homogènes est donnée par la formule :

Dimension (du sev des solutions) $=$
nombre d'inconnues -rang du système d'équations.

## Exo 2

Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel des solutions d'un système de trois équations homogènes de rang 2 aux inconnues $x, y, z, t, u$ ?

# Dimension des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$

**Comme sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, on a**

- en dimension 0 :
  $\{0\}$ (qui est l'ensemble des solutions de $x = y = 0$) ;
- en dimension 1 :
  les droites passant par 0 (elles ont une équation homogène) ;
- en dimension 2 :
  $\mathbb{R}^2$ tout entier (qui est l'ensemble des solutions de $0 = 0$).

# Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

**Comme sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, on a**

- en dimension 0 :
  $\{0\}$, qui est l'ensemble des solutions de $x = y = z = 0$ ;
- en dimension 1 :
  les droites passant par 0, qui ont toutes un système de deux équations homogènes ;
- en dimension 2 :
  les plans passant par 0, qui ont tous une équation homogène ;
- en dimension 3 :
  $\mathbb{R}^3$ tout entier qui est l'ensemble des solutions de $0 = 0$.

# Fausse dimension des sous-espaces vectoriels engendrés

## L'idée

La dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$ engendré par $(e_1, \cdots, e_m)$ devrait être le nombre de générateurs $m$
Mais c'est faux ! il ne faut pas compter naïvement les générateurs.

## Exo 3

Donnez un exemple de système de trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui n'engendrent qu'un plan.

# Dimension des sous-espaces vectoriels engendrés

### Théorème

La dimension du sous-espace vectoriel engendré par un système de vecteurs est le rang de ce système.

### Exo 4

Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par un système de trois vecteurs de rang 2 dans $\mathbb{R}^4$ ?