

# Equations aux antécédents

Dédou

Octobre 2010

# Equations résolues

Il y a toutes sortes d'équations. Les équations préférées des boulets sont les équations résolues, celles de la forme

$$x = a$$

où  $x$  est l'inconnue et  $a$  est la formule qui "donne" la solution du problème.

Les équations résolues sont rares et ne rapportent pas gros.

# Equations aux antécédents

Juste derrière les équations résolues, on aime bien les équations aux antécédents. Ce sont celles qui sont de la forme

$$f(x) = a$$

où  $x$  est l'inconnue, tandis que  $f$  et  $a$  sont donnés. La particularité des équations résolues est donc que leur second membre est une (fonction) constante.

# Le cas tout réel

Le cas qu'on maîtrise le mieux, c'est celui où l'inconnue et l'équation sont de type réel, et  $f$  va de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Ça se dessine grave.

## Exemple

Si on prend

$$f := x \mapsto x^2 - 5 \quad \text{et} \quad a := \cos \pi$$

on obtient l'équation

$$x^2 - 5 = \cos \pi.$$

## Exo 1

Résoudre l'équation précédente.

# Equations générales

Une équation générale peut toujours se ramener à (ça veut dire "est équivalente à", "a les mêmes solutions que") une équation aux antécédents.

## Exemple

L'équation du nombre d'or

$$x^2 = x + 1$$

est équivalente à

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{ou à} \quad x^2 - x = 1.$$

# Le cas des points

On peut parler d'équation aux antécédents même lorsque l'inconnue est de type vectoriel.

## Exemple

On considère

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ M &\mapsto AM^2 \end{aligned}$$

où  $A$  est un point donné.

L'ensemble des solutions de

$$f(M) = 3$$

est un cercle. C'est l'ensemble des antécédents de 3 par  $f$ .

## Le cas des couples

Au lieu de chercher un point  $M$ , on peut chercher son couple de coordonnées  $x$  et  $y$ .

### Exemple

L'ensemble des solutions de

$$2x + 3y^2 = 3$$

est une parabole. C'est l'ensemble des antécédents de 3 par la fonction

$$(x, y) \mapsto 2x + 3y^2.$$

### Exo 2

Identifiez  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^3 = 2\}$  comme ensemble d'antécédents d'un nombre  $a$  par une fonction  $f$ .

# Equation aux antécédents de type vectoriel

On peut parler d'équation aux antécédents même pour les équations de type vectoriel.

## Exemple

Etant donnés trois points  $A, B, C$  de  $\mathbb{R}^2$  et trois nombres  $a, b, c$  l'équation aux barycentres de  $A, B, C$  pondérés par  $a, b, c$  est l'équation suivante à l'inconnue  $G$  de type  $\mathbb{R}^2$  :

$$a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} = 0.$$

Ses solutions sont les antécédents de 0 par l'application

$$f : G \mapsto a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC}.$$

# Les systèmes linéaires comme équations aux antécédents

Le système

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 5x + 7y - 2z = 2 \end{cases}$$

s'interprète comme équation aux antécédents de  $a := (1, 2)$   
par  $f := (x, y, z) \mapsto (2x + 3y + 4z, 5x + 7y - 2z)$ .

## Exo 3

Traduire en système linéaire l'équation aux antécédents de  $(3, 4)$   
par  $(x, y) \mapsto (x - y, 2x - 3y)$ .

## Linéaire ou affine ?

On préfère interpréter notre système linéaire comme équation aux antécédents

de  $a := (1, 2)$  par  $f := (x, y, z) \mapsto (2x + 3y + 4z, 5x + 7y - 2z)$

que comme équation aux antécédents

de  $a := 0$  par  $f := (x, y, z) \mapsto (2x + 3y + 4z - 1, 5x + 7y - 2z - 2)$ .

On préfère de beaucoup que  $f$  soit plus simple, même si  $a$  est (un peu) plus compliqué.