Liberté des systèmes homogènes

Dédou

Octobre 2010

Relations de dépendance

Une relation de dépendance (linéaire) entre par exemple quatre équations E_1, E_2, E_3, E_4, c'est une égalité de la forme

$$aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 = 0$$

où a, b, c, d sont quatre nombres.
Ici, le 0 de droite représente l'équation "débile" $0 = 0$.

Exemple

Les trois équations

$$(E_1) \quad x - y = 0, \quad (E_2) \quad y - z = 0, \quad (E_3) \quad -x + z = 0$$

vérifient la relation de dépendance

$$E_1 + E_2 + E_3 = 0.$$

La relation de dépendance triviale

La relation de dépendance $0E_1 + 0E_2 + 0E_3 + 0E_4 = 0$, qui est toujours vraie, n'est pas comme les autres, elle ne contient aucune information. On l'appelle relation de dépendance **triviale**.
On s'intéresse donc seulement aux relations de dépendance non triviales.

Exo 1

Trouvez une relation de dépendance non triviale entre les trois équations

$$(E_1)\ \ x - y = 0, \quad (E_2)\ \ 2y - z = 0, \quad (E_3)\ \ -2x + z = 0.$$

Décompositions linéaires et relations de dépendance

Supposons par exemple qu'on a quatre équations E_1, E_2, E_3, E_4 avec E_2 combinaison linéaire des autres

$$E_2 = 3E_1 - 5E_3 + \pi E_4.$$

On convertit cette décomposition linéaire en relation de dépendance non triviale en "mettant tout le monde du même côté" :

$$E_2 - 3E_1 + 5E_3 - \pi E_4 = 0.$$

Exo 2

Convertissez la décomposition linéaire $E_3 = 3E_1 - E_4$ en relation de dépendance.

Relations de dépendance et décompositions linéaires

Inversement, si nos quatre équations vérifient la relation de dépendance non triviale

$$4E_1 + 5E_3 - \pi E_4 = 0,$$

on peut convertir cette information en décomposition linéaire, par exemple :

$$E_3 = -\frac{4}{5}E_1 + \frac{\pi}{5}E_4.$$

Exo 3

Convertissez de deux façons différentes la relation de dépendance $\pi E_1 + 2E_3 - 3E_4 = 0$ en décomposition linéaire.

Mon premier système linéaire lié

Le système linéaire suivant aux inconnues x, y, z, t

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 7y - 2z - 4t = 0 \\ 2x - 4y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$$

a trois équations et son rang n'est que deux. En effet, ses trois équations, notées E_1, E_2, E_3 sont reliées par la relation $E_3 = E_1 - E_2$.

On dit que ce système est **lié**. On dit aussi qu'il est **dépendant**.

Exo 4

Ecrivez un autre système lié de trois équations homogènes à quatre inconnues.

Mon premier système linéaire d'équations indépendantes

Le système

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z - 5t = 0 \\ \qquad\; 7y - 2z - 4t = 0 \\ \qquad\; 4y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$$

a trois équations et son rang est aussi trois (facile !).
On dit que ces équations sont **indépendantes**. On dit aussi que ce système est **libre**.

Exo 5

Ecrivez un autre système de trois équations homogènes indépendantes à quatre inconnues.

Liberté et indépendance, même combat

On dit qu'un système d'équations homogènes est libre ssi

son rang est égal à son nombre d'équations.

Libre = indépendant =non lié.

Lié = dépendant =non libre.

Les conditions bêtes de la liberté

Un système d'équations homogènes est lié ssi

une de ses équations est combinaison linéaire des autres.

Un système d'équations homogènes est libre ssi

aucune de ses équations n'est combinaison linéaire des autres.

Donc

pour montrer que les équations E_1, E_2, E_3, E_4 sont indépendantes

il faudrait montrer que

- $E_1 = xE_2 + yE_3 + zE_4$ est impossible ;
- $E_2 = xE_1 + yE_3 + zE_4$ est impossible ;
- $E_3 = xE_1 + yE_2 + zE_4$ est impossible ;
- $E_4 = xE_1 + yE_2 + zE_3$ est impossible.

La condition diabolique de la liberté

Un système d'équations homogènes est lié ssi

ses équations vérifient une relation de dépendance **non triviale**.

Un système d'équations homogènes est libre ssi

sa seule relation de dépendance est la triviale.

Donc

pour montrer les équations E_1, E_2, E_3, E_4 sont indépendantes

il suffit de montrer

$\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}$,

$$xE_1 + yE_2 + zE_3 + tE_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y = z = t = 0.$$

La diabolique avec des lambdas

Pour montrer les équations E_1, E_2, E_3, E_4 sont indépendantes

il suffit de montrer
$\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}$,

$$xE_1 + yE_2 + zE_3 + tE_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y = z = t = 0.$$

Pour montrer que les équations E_1, E_2, E_3, E_4 sont indépendantes

il suffit de montrer
$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$,
$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \lambda_4 E_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$

La diabolique avec un sigma

Pour montrer que les équations E_1, E_2, E_3, E_4 sont indépendantes

il suffit de montrer
$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \lambda_4 E_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Pour montrer que les équations E_1, E_2, E_3, E_4 sont indépendantes

il suffit de montrer
$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$,

$$\Sigma_{i=1}^{4} \lambda_i E_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

La diabolique avec n équations

Pour montrer que les équations E_1, E_2, E_3, E_4 sont indépendantes

il suffit de montrer
$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$,

$$\Sigma_{i=1}^{4} \lambda_i E_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Pour montrer que les équations $E_1, \cdots, E_n$ sont indépendantes

il suffit de montrer
$\forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

$$\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i E_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

La diabolique avec un vecteur λ

Pour montrer que les équations $E_1, \cdots, E_n$ sont indépendantes

il suffit de montrer
$\forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

$$\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i E_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Pour montrer que les équations $E_1, \cdots, E_n$ sont indépendantes

il suffit de montrer
$\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$,

$$\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i E_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.$$

Liberté et équivalence

Attention

La liberté n'est pas préservée par équivalence (le rang, oui ; le nombre d'équations, non).

Exemple

A gauche un système lié, à droite un système libre équivalent :

$$\left\{\begin{array}{l} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{array}\right.$$

Exo 6

Ecrivez deux autres systèmes équivalents dont un seul est libre.

Invariance de la liberté

On ne change pas la liberté d'un système

- en multipliant une de ses équations par un réel non nul
- en ajoutant à une équation un multiple d'une autre.

Mais on peut priver un système de sa liberté en lui ajoutant une équation qui est combinaison linéaire des autres.

Hérédité de la liberté

Proposition

- Tout sous-système d'un système libre est libre ;
- Tout système dont un sous-système est lié est lui aussi lié.

Preuve

- Si dans le grand système aucune équation n'est combinaison linéaire des autres, celles du petit système sont encore moins combinaisons linéaires des autres équations du petit système.
- Si dans un sous-système, une équation est combinaison linéaire des autres, cette équation est a fortiori combinaison linéaire des autres dans le système entier.

Systèmes sympas et liberté

Proposition

Les systèmes homogènes échelonnés sont libres.

Proposition

Un système facile est libre ssi son système dérivé l'est.

Gauss et la liberté

Pour déterminer si un système est libre

- on le rend facile (par Gauss) puis
- on étudie la liberté du système dérivé.