Liberté des systèmes de vecteurs

Dédou

Octobre 2010

Relations de dépendance

Une relation de dépendance (linéaire) entre par exemple quatre vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 de $\mathbb{R}^n$, c'est une égalité de la forme

$$av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = 0$$

où a, b, c, d sont quatre nombres.
Ici, le 0 de droite représente le zéro de $\mathbb{R}^n$.

Exemple

Les trois vecteurs

$$v_1 := (1, -1, 0), \qquad v_2 := \quad (0, 1, -1), \qquad v_3 := (-1, 0, 1)$$

de $\mathbb{R}^3$ vérifient la relation de dépendance

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0.$$

La relation de dépendance triviale

La relation de dépendance $0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4 = 0$, qui est toujours vraie, n'est pas comme les autres, elle ne contient aucune information. On l'appelle relation de dépendance **triviale**.
On s'intéresse donc seulement aux relations de dépendance non triviales.

Exo 1

Trouvez une relation de dépendance non triviale entre les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 := (1, -1, 0), \quad v_2 := (0, 2, -1), \quad v_3 := (-2, 0, 1).$$

Décompositions linéaires et relations de dépendance

Supposons par exemple qu'on a quatre vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 avec v_2 combinaison linéaire des autres

$$v_2 = 3v_1 - 5v_3 + \pi v_4.$$

On convertit cette décomposition linéaire en relation de dépendance non triviale en "mettant tout le monde du même côté" :

$$v_2 - 3v_1 + 5v_3 - \pi v_4 = 0.$$

Exo 2

Convertissez la décomposition linéaire $v_3 = 3v_1 - v_4$ en relation de dépendance.

Relations de dépendance et décompositions linéaires

Inversement, si nos quatre vecteurs vérifient la relation de dépendance non triviale

$$4v_1 + 5v_3 - \pi v_4 = 0,$$

on peut convertir cette information en décomposition linéaire, par exemple :

$$v_3 = -\frac{4}{5}v_1 + \frac{\pi}{5}v_4.$$

Exo 3

Convertissez de deux façons différentes la relation de dépendance $\pi v_1 + 2v_3 - 3v_4 = 0$ en décomposition linéaire.

Mon premier système de vecteurs liés

Le rang du système de vecteurs suivant est 2 :

$$v_1 := (1, -1, 0), \quad v_2 := (0, 2, -1), \quad v_3 := (-2, 0, 1).$$

En effet, on a $v_3 = -2v_1 - v_2$.
On dit que ce système est **lié**. On dit aussi qu'il est **dépendant**.

Exo 4

Ecrivez un autre système lié de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Mon premier système de vecteurs indépendants

Le rang du système de vecteurs suivant est 3 (facile !) :

$$v_1 := (1, -1, 0), \quad v_2 := (0, 2, -1), \quad v_3 := (0, 0, 1).$$

On dit que ce système est **libre**. On dit aussi que ses vecteurs sont **indépendants**.

Exo 5

Ecrivez un autre système de trois vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^3$.

Liberté et indépendance, même combat

On dit qu'un système de vecteurs est libre ssi

son rang est égal à son nombre de vecteurs.

Libre $=$ indépendant $=$non lié.

Lié $=$ dépendant $=$non libre.

Les conditions bêtes de la liberté

Un système de vecteurs est lié ssi

un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Un système de vecteurs est libre ssi

aucun de ces vecteurs n'est combinaison linéaire des autres.

Donc

pour montrer que les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 sont indépendants

il faudrait montrer que

- $v_1 = xv_2 + yv_3 + zv_4$ est impossible ;
- $v_2 = xv_1 + yv_3 + zv_4$ est impossible ;
- $v_3 = xv_1 + yv_2 + zv_4$ est impossible ;
- $v_4 = xv_1 + yv_2 + zv_3$ est impossible.

La condition diabolique de la liberté

Un système de vecteurs est lié ssi

ces vecteurs vérifient une relation de dépendance **non triviale**.

Un système de vecteurs est libre ssi

sa seule relation de dépendance est la triviale.

Donc

pour montrer que les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 sont indépendants

il suffit de montrer

$\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}$,

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y = z = t = 0.$$

La diabolique avec des lambdas

Pour montrer que les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 sont indépendants

il suffit de montrer
$\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}$,

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y = z = t = 0.$$

Pour montrer que les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 sont indépendants

il suffit de montrer
$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

La diabolique avec un sigma

Pour montrer que les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 sont indépendants

il suffit de montrer
$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Pour montrer que les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 sont indépendantes

il suffit de montrer
$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$,

$$\Sigma_{i=1}^{4} \lambda_i v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

La diabolique avec n vecteurs

Pour montrer que les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 sont indépendantes

il suffit de montrer
$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$,

$$\Sigma_{i=1}^{4} \lambda_i v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Pour montrer que les vecteurs $v_1, \cdots, v_n$ sont indépendantes

il suffit de montrer
$\forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

$$\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

La diabolique avec un vecteur λ

Pour montrer que les vecteurs $v_1, \cdots, v_n$ sont indépendants

il suffit de montrer
$\forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

$$\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Pour montrer que les vecteurs $v_1, \cdots, v_n$ sont indépendants

il suffit de montrer
$\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$,

$$\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.$$

Invariance de la liberté

On ne change pas la liberté d'un système

- en multipliant un de ses vecteurs par un réel non nul
- en ajoutant à un de ces vecteurs un multiple d'une autre.

Hérédité de la liberté

Proposition

- Tout sous-système d'un système libre est libre ;
- Tout système dont un sous-système est lié est lui aussi lié.

Preuve

- Si dans le grand système aucun vecteur n'est combinaison linéaire des autres, ceux du petit système sont encore moins combinaisons linéaires des autres vecteurs du petit système.
- Si dans un sous-système, un vecteur est combinaison linéaire des autres, ce vecteur est a fortiori combinaison linéaire des autres dans le système entier.

Systèmes faciles et liberté

Un système facile est libre ssi

son système dérivé l'est.

Gauss et la liberté

Pour déterminer si un système est libre

- on le rend facile (par Gauss) puis
- on étudie la liberté du système dérivé.