

# Matrices des applications linéaires générales

Dédou

Novembre 2010

## Exemple : l'espace des trinômes

### Les trinômes

On considère l'espace  $E$  des trinômes du second degré. C'est plus ou moins  $\mathbb{R}^3$  puisqu'un tel trinôme est déterminé par ses trois coefficients. On concrétise ça en considérant la base  $(1, X, X^2)$  comme canonique.

De même on note  $E'$  l'espace des fonctions affines, qu'on munit de la base "canonique"  $(1, X)$ .

## Exemple : la dérivation des trinômes

### La dérivation

La dérivation est une application linéaire qui envoie  $E$  dans  $E'$

$$d : E \rightarrow E' := P \mapsto P'.$$

### La matrice de la dérivation

Du coup, on peut former la matrice de cette dérivation. C'est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a dérivé successivement  $1$ ,  $X$  et  $X^2$ , et écrit en colonnes les coordonnées du résultat dans la base  $(1, X)$ .

## Exercice : multiplication par un binôme

### Exo 1

On considère à nouveau l'espace  $E$  des trinômes du second degré et celui  $E'$  des binômes. La multiplication par  $3X + 4$  envoie cette fois  $E'$  dans  $E$  et elle est aussi linéaire. Quelle est sa matrice dans les bases canoniques ?

# Interpolation : bases canoniques

## Exemple

On considère à nouveau l'espace  $E$  des trinômes du second degré et l'application

$$ev : E \rightarrow \mathbb{R}^3 := P \mapsto (P(2), P(3), P(5)).$$

Sa matrice dans les bases canoniques est bien vilaine

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}.$$

## Exemple

On considère à nouveau l'espace  $E$  des trinômes du second degré et l'application

$$ev : E \rightarrow \mathbb{R}^3 := P \mapsto (P(2), P(3), P(5)).$$

Cette fois on prend pour base de  $E$  :  $(1, X - 2, (X - 2)(X - 3))$ .  
La matrice de  $ev$  dans cette base est triangulaire !

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

On a écrit dans la première colonne les coordonnées de l'image du premier vecteur de base.

## Exo 2

On considère à nouveau l'espace  $E$  des trinômes du second degré et l'application

$$ev' : E \rightarrow \mathbb{R}^3 := P \mapsto (P(1), P(4), P(6)).$$

Choisissez une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $ev'$  est triangulaire, et écrivez cette matrice.

## Multiplication : exemple

### Exemple

On considère à nouveau une multiplication, celle par  $X - 2$ .

$$m : E' \rightarrow E := P \mapsto (X - 2)P.$$

Cette fois on prend pour base de  $E : (1, X - 2, (X - 2)^2)$  et pour base de  $E' : (1, X - 2)$

La matrice de  $m$  dans ces bases est très simple !

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a encore écrit dans la première colonne les coordonnées de l'image du premier vecteur de base.



## Exo 3

On considère cette fois la multiplication par  $X - 3$ .

$$m : E' \rightarrow E := P \mapsto (X - 3)P.$$

Choisissez des bases de  $E$  et  $E'$  dans lesquelles la matrice de  $m$  dans ces bases est très simple, et écrivez cette matrice.