Opérations linéaires sur les applications linéaires

Dédou

Novembre 2010

Exemple d'addition

La somme de

$$(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 2x+3y+5z \\ 4x+6y+7z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} x+y+2z \\ 2x+y+z \end{pmatrix}$$

c'est

$$(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 3x+4y+7z \\ 6x+7y+8z \end{pmatrix}.$$

Exo 1

Calculez la somme de

$$(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 2x+2y+5z \\ 4x+6y+2z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} x+2y+2z \\ 2x+2y+z \end{pmatrix}.$$

Carte de visite des additions

On note $L_{p,q}$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$.
On peut additionner deux telles applications :

$$\begin{array}{rccl} Add_{p,q} : & L_{p,q} \times L_{p,q} & \rightarrow & L_{p,q} \\ & (f,g) & \mapsto & f+g \\ & (f,g) & \mapsto & (v \mapsto f(v)+g(v)) \end{array}$$

Slogan

On n'additionne que des applications de même source et même but.

Surcharge pour l'addition

Notation

On note l'addition des applications avec le signe $+$, exactement comme l'addition des nombres et celles des vecteurs.

Exo 2

Sachant que f et g “vont” de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$, dites quelles “sont les additions figurant dans la formule

$$(f+g)(\lambda u + \mu v) + (\lambda + \mu) f(w).$$

Commutativité des additions : énoncés

Proposition

L'addition des applications linéaires est commutative.

Et plus formellement, ça se lit :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \forall f, g \in L_{p,q}, \quad f + g = g + f.$$

Commutativité des additions : démonstration

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \forall f, g \in L_{p,q}, \quad f + g = g + f.$$

Preuve

Soient p et q deux entiers, et f et g deux applications linéaires de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$. On veut montrer $f + g = g + f$.

Dire que ces deux applications sont égales, c'est par définition dire : $\forall v \in \mathbb{R}^q, \quad (f + g)(v) = (g + f)(v)$.

Soit donc v quelconque dans $\mathbb{R}^q$. On a

(f+g)(v) =f(v) +g(v) (par définition de l'addition des applications)

=g(v) +f(v) (par commutativité de l'addition dans $\mathbb{R}^p$)

=(g+f)(v) (par définition de l'addition des applications).

Cqfd.

L'idée

La commutativité de l'addition des applications se réduit à la commutativité de l'addition des vecteurs.

Associativité des additions : énoncés

Proposition

L'addition des applications linéaires est associative.

Et plus formellement, ça se lit :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \forall f, g, h \in L_{p,q}, \quad (f+g)+h = f+(g+h).$$

Exo pour les surmotivés

Prouver cette associativité.

Multiplication externe : exemple

La produit par 10 de

$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 3y + 5z \\ 4x + 6y + 7z \end{pmatrix}$$

c'est

$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 20x + 30y + 50z \\ 40x + 60y + 70z \end{pmatrix}.$$

Exo 3

Calculer $3f$ pour $f := (x, y) \mapsto (2x - 3y, 4x - 5y)$.

Carte de visite des multiplications externes

On rappelle que $L_{p,q}$ désigne l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$. On peut multiplier de telles applications par un nombre :

$$\begin{array}{rccl} Multex_{p,q}: & \mathbb{R} \times L_{p,q} & \rightarrow & L_{p,q} \\ & (\lambda, f) & \mapsto & \lambda f \\ & (\lambda, f) & \mapsto & v \mapsto \lambda f(v) \end{array}$$

Surcharge pour les multiplications

Notation

On note la multiplication externe des applications sans aucun signe (ou parfois avec un point) exactement comme la multiplication externe des vecteurs.

Exo 4

Sachant que f "va" de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$, dites quelles sont les multiplications figurant dans la formule

$$(\lambda f)(\mu v) + (\lambda\mu) f(w).$$

Associativité des multiplications externes

Proposition

Les multiplications externes des applications linéaires sont associatives.

Ce qu'on entend par là, c'est :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in L_{p,q}, \quad \lambda(\mu f) = (\lambda\mu) f.$$

Exo pour les surmotivés

Prouver cette associativité.

Combinaisons linéaires d'applications linéaires

Comme d'habitude,

puisqu'on sait ajouter et multiplier par un nombre, on sait faire des combinaisons linéaires.

Exo 5

On pose

$$f := (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 3y + 5z \\ 4x + 6y + 7z \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$g := (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ 2x + y + z \end{pmatrix}.$$

Calculez $2f - 3g$.

Relations de dépendance entre applications linéaires

Comme d'habitude,

puisqu'on sait faire des combinaisons linéaires d'applications linéaires, on sait définir les relations linéaires entre applications linéaires.

Exo 6

On pose

$$f := (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix},\ g := (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 2x \end{pmatrix}$$
$$\text{et} \quad h := (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ 2x+3y \end{pmatrix}.$$

Trouvez une relation de dépendance non triviale entre f, g et h.