Opérations sur les matrices

Dédou

Novembre 2010

Exemple d'addition

La somme de

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exo 1

Calculez la somme de

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Carte de visite des additions

On note $M_{p,q}$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes. On peut additionner deux telles matrices :

$$\begin{array}{rccl} Add_{p,q} : & M_{p,q} \times M_{p,q} & \rightarrow & M_{p,q} \\ & (A, B) & \mapsto & A + B \\ & (A, B) & \mapsto & ((i,j) \mapsto A_{ij} + B_{ij}) \end{array}$$

Slogan

On n'additionne que des matrices de même taille.

Le sens de l'addition

L'addition des matrices est conçue de façon à valider la

Proposition

a) La matrice de la somme de deux applications linéaires est la somme des matrices.
b) L'application linéaire associée à une somme de matrices est la somme des applications linéaires associées.

Commutativité des additions : énoncé

Proposition

L'addition des matrices est commutative.

Et plus formellement, ça se lit :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \forall A, B \in M_{p,q}, \quad A + B = B + A.$$

L'égalité des matrices

Définition

Deux matrices à p lignes et q colonnes sont égales ssi elles ont les mêmes coefficients.

Plus formellement, ça se lit :

$\forall p, q \in \mathbb{N}, \forall A, B \in M_{p,q},$

$$A = B \Leftrightarrow \forall i \in [1..p], \forall j \in [1..q], A_{ij} = B_{ij}.$$

Commutativité des additions : démonstration

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \forall A, B \in M_{p,q}, \quad A + B = B + A.$$

Preuve

Soient p et q deux entiers, et A et B deux matrices dans $M_{p,q}$.
On veut montrer $A + B = B + A$.
Pour cela soient i dans $[1..p]$ et j dans $[1..q]$ et montrons $(A + B)_{ij} = (B + A)_{ij}$. On a

$(A + B)_{ij}$
$= A_{ij} + B_{ij}$ (par définition de l'addition des matrices)
$= B_{ij} + A_{ij}$ (par commutativité de l'addition dans $\mathbb{R}$)
$= (B + A)_{ij}$. (par définition de l'addition des matrices).

Cqfd.

L'idée

La commutativité de l'addition des matrices se réduit à la commutativité de l'addition des nombres.

Associativité de l'addition des matrices : énoncé

Proposition

L'addition des matrices est associative.

Et plus formellement, ça se lit :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \forall A, B, C \in L_{p,q}, \quad (A + B) + C = A + (B + C).$$

Exo 2

Prouver cette associativité.

Multiplication externe : exemple

La produit par 10 de

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

c'est

$$\begin{pmatrix} 20 & 30 & 50 \\ 40 & 60 & 70 \end{pmatrix}.$$

Exo 3

Calculer $3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & e \end{pmatrix}$.

Carte de visite des multiplications externes

On rappelle que $M_{p,q}$ désigne l'ensemble des matrices à p ligens et q colonnes. Voici la carte de visite de la multiplication externe des matrices, qu'on appelle encore *Multex*

$$
\begin{array}{rccl}
Multex_{p,q}: & \mathbb{R} \times M_{p,q} & \longrightarrow & M_{p,q} \\
 & (\lambda, A) & \longmapsto & \lambda A \\
 & (\lambda, A) & \longmapsto & (i,j) \mapsto \lambda A_{ij}.
\end{array}
$$

Surcharge pour les multiplications

Notation

Comme d'hab, on note la multiplication externe des matrices sans aucun signe (ou parfois avec un point) exactement comme la multiplication externe des vecteurs.

Associativité des multiplications externes

Proposition

Les multiplications externes des applications linéaires sont associatives.

Ce qu'on entend par là, c'est :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall A \in M_{p,q}, \quad \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A.$$

Exo 4

Prouver cette associativité.

Combinaisons linéaires de matrices

Comme d'habitude,

puisqu'on sait ajouter et multiplier par un nombre, on sait faire des combinaisons linéaires.

Exo 5

On pose

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculez $3A - 2B$.

Décomposition linéaire de matrices : exemple

Comme d'habitude, puisqu'on sait faire des combinaisons linéaires,

on peut se poser des problèmes de décomposition linéaire.

Exemple

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Voyons si C est combinaison linéaire de A et B.
Si on a $C = xA + yB$, alors, à cause des premières colonnes, on a $x = 2$ et $x + y = 1$, d'où $y = -1$
On calcule alors $2A - B$:
si on trouve C, c'est que C est combinaison linéaire de A et B ;
si on ne trouve pas C, c'est que C n'est pas combinaison linéaire de A et B.

Décomposition linéaire de matrices : exercice

Exo 6

On pose $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Est-ce que C est combinaison linéaire de A et B ?

Relations de dépendance entre matrices

Comme d'habitude,

puisqu'on sait faire des combinaisons linéaires de matrices, on sait définir les relations linéaires entre matrices.

Systèmes libres de matrices

Comme d'habitude, un système de matrices (de même taille) est libre

s'il ne vérifie aucune relation de dépendance non triviale.

Comme d'habitude, un système de matrices (de même taille) est générateur

si toute matrice de cette taille est combinaison linéaire du système.

Comme d'habitude, un système de matrices (de même taille) est une base

s'il est libre et générateur.

Base canonique des matrices : exemple

Exemple

Les quatre matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

forment une base, qu'on appelle canonique, de l'espace des matrices à deux lignes et deux colonnes.

Exo

Donnez les coordonnées de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Base canonique des matrices : exercice

Exo

Donnez la base qu'on appelle canonique de l'espace des matrices à deux lignes et trois colonnes.