

Méthode du pivot de Gauss

Dédou

Octobre 2010

La méthode du pivot

La méthode du pivot

permet d'associer à tout système linéaire un système facile équivalent.

Elle consiste à sélectionner une équation qu'on va garder intacte, et dans laquelle on va rendre une inconnue facile (en l'éliminant des autres équations). Dans cette démarche, ce qu'on appelle le pivot, c'est la paire (équation, inconnue) choisie.

Mon premier pivot I

$$\text{Pour résoudre le système } \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 5z = 2 \\ 4x - y - z = 0, \end{cases}$$

on décide de rendre facile l'inconnue x dans la première équation.

Pour cela, on "tue" x dans les deux autres en faisant

$E_2 := 2E_2 - 3E_1$, puis $E_3 := E_3 - 2E_1$. On obtient le système facile équivalent :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ -7y + 7z = 1 \\ -7y - 3z = -2. \end{cases}$$

Mon premier pivot II

Pour résoudre le système facile

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ -7y + 7z = 1 \\ -7y - 3z = -2. \end{cases}$$

on résout le système dérivé (par combinaison linéaire) et on conclut avec l'équation facile.

Exo 1

Faites-le.

Le choix par défaut du pivot

Pour appliquer la méthode du pivot à un système, on commence donc par y choisir une équation et une inconnue qu'on va rendre faciles en modifiant les autres équations. Le choix de la première équation et de la première inconnue est le choix par défaut .

$$\text{Pour le système } \begin{cases} 3y + t = 1 \\ 2x + 5z - t = 2 \\ y - z - t = 0, \end{cases}$$

le choix par défaut ne convient pas puisque x n'apparaît pas dans la première équation.

Le cas sympa

Le cas sympa,

c'est quand le coefficient de l'inconnue facile est 1 (ou -1).

Pour résoudre le système suivant, on choisit le pivot par défaut :

$$\begin{cases} x + 3y + t = 1 \\ 4x + 5z - t = 2 \\ 5x + y - z - t = 0. \end{cases}$$

Ensuite on ajoute aux équations non choisies le multiple qu'il faut de l'équation choisie pour "tuer" l'inconnue choisie. Ici, on fait

$$E_2 := E_2 - 4E_1 \quad \text{et} \quad E_3 := E_3 - 5E_1,$$

ce qui nous donne le système facile équivalent

$$\begin{cases} x + 3y + t = 1 \\ -12y + 5z - 5t = -2 \\ -14y - z - 6t = -5. \end{cases}$$

Le cas moins sympa

Le cas moins sympa, c'est quand le coefficient de la future inconnue facile dans la future équation facile n'est ni 1 ni -1 :

$$\begin{cases} 3x + 3y + 2t = 1 \\ 4x + 5z - 3t = 2 \\ 5x + 2y - 3z - 8t = 0 \end{cases}$$

Si on fait encore le choix par défaut du pivot, il faudra faire par exemple les transformations $E_2 := 3E_2 - 4E_1$ et $E_3 := 3E_3 - 5E_1$ qui sont bien licites (produisent bien un système équivalent).

Choix intelligent I

Pour résoudre le système suivant, on choisit plutôt de rendre z facile dans la deuxième équation, à cause du coefficient -1 :

$$\begin{cases} 3x + 3y + 2z = 1 \\ 4x + 5y - z = 2 \\ 5x + 2y - 2z = 0. \end{cases}$$

On fait les transformations “élémentaires” $E_1 := E_1 + 2E_2$ et $E_3 := E_3 - 2E_2$, qui rendent le système facile.

Exo 2

Résoudre le système de cette façon.

Choix intelligent II

Pour résoudre le système suivant, on choisit plutôt de rendre y facile dans la deuxième équation, ce qui économise une transformation élémentaire :

$$\begin{cases} 3x + 3y + 2z = 1 \\ 4x + y - z = 2 \\ 5x - 2z = 0. \end{cases}$$

On fait la transformation "élémentaires" $E_1 := E_1 - 3E_2$ qui rend le système facile.

Exo 3

Résoudre le système de cette façon.

La méthode du pivot pour résoudre

Pour résoudre un système, on applique une première fois la méthode au système donné, puis a une deuxième fois au système dérivé du système facile obtenu, et ainsi de suite,

jusqu'à obtenir une équation impossible ou un système à une ou deux équations, qu'on sait résoudre.