Sous-espaces vectoriels

Dédou

Octobre 2010

Combiner des solutions d'un système homogène : exemple

Exemple

On considère le système de deux équations homogènes :

$$\begin{cases} -x + y + z + t = 0 \\ -y + 2z + 3t = 0. \end{cases}$$

Je trouve une solution "avec $z = 1$ et $t = 0$" : $s_1 := (3, 2, 1, 0)$
et une autre "avec $z = 0$ et $t = 1$" : $s_2 := (4, 3, 0, 1)$.
Maintenant je fais une combinaison linéaire au hasard :

$$s := 3s_1 + 2s_2 = (17, 12, 3, 2)$$

et je tombe sur une nouvelle solution.

C'est un phénomène général.

Exo 1

Trouver par le même procédé une autre solution du même système.

Combiner des solutions d'un système homogène

Proposition

Soit S un système d'équations homogènes à n inconnues, et soient s et s' (dans $\mathbb{R}^n$) deux solutions de S. Alors toute combinaison linéaire de s et s' est encore solution de S.

Preuve

Soit $v := as + a's'$ la combinaison linéaire à traîter. On doit montrer que v satisfait toutes les équations de S. Soit $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0$ l'une de ces équations. Comme s et s' en sont solutions, on a $c_1s_1 + \cdots + c_ns_n = 0$ et $c_1s_1' + \cdots + c_ns_n' = 0$. On a donc $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = c_1(as_1 + a's_1') + \cdots + c_n(as_n + a's_n') = ac_1s_1 + \cdots + ac_ns_n + a'c_1s_1' + \cdots + a'c_ns_n' = 0 + 0 = 0$ ce qui signifie bien que v est solution de l'équation considérée.

On le dit un peu autrement

Proposition

L'ensemble des solutions d'un système d'équations homogènes à n inconnues est une partie de $\mathbb{R}^n$ qui

- contient 0
- est stable par combinaison linéaire.

Combiner des combinaisons linéaires : exemple

Exemple

On considère le plan $<(1,0,0),(1,1,1)>$ engendré par les deux vecteurs e_1 et e_2 indiqués.
On y prend deux vecteurs au hasard : $v_1 := 2e_1 + 3e_2$ et $v_2 := 4e_1 + 5e_2$.
Et maintenant on en fait une combinaison linéaire au hasard : $v := 6v_1 + 7v_2$.
On a

$$v = 6(2e_1 + 3e_2) + 7(4e_1 + 5e_2) = 40e_1 + 53e_2$$

et v est aussi dans $<(1,0,0),(1,1,1)>$.

C'est un phénomène général.

Combiner des combinaisons linéaires

Proposition

Soit S un système de vecteurs d'un espace vectoriel E, et soient v et v' (dans $\mathbb{R}^n$) deux combinaisons linéaires de S. Alors toute combinaison linéaire de v et v' est encore combinaison linéaire de S.

Exo 2

Soit $v := as + a's'$ la combinaison linéaire à traîter...

On le dit autrement

Proposition

L'ensemble des combinaisons linéaires d'un système de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une partie de $\mathbb{R}^n$ qui

- contient 0
- est stable par combinaison linéaire.

Sous-espaces vectoriels

Définition

Dans un espace vectoriel, un sous-espace vectoriel est une partie qui

- contient 0
- est stable par combinaison linéaire.

Sous-espaces vectoriels et systèmes homogènes

Proposition

L'ensemble des solutions d'un système d'équations homogènes à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Et la réciproque est vraie !

Théorème

Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des solutions d'un système d'équations homogènes à n inconnues.

Sous-espaces vectoriels et combinaisons linéaires

Proposition

L'ensemble $< e_1, \cdots, e_m >$ des combinaisons linéaires d'un système de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Et la réciproque est vraie !

Théorème

Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble $< e_1, \cdots, e_m >$ des combinaisons linéaires d'un système de vecteurs.

L'esprit de contradiction

L'esprit de contradition commande : si on me donne un sous-espace vectoriel par des équations, j'en demande des générateurs et vice-versa.