Sous-espace engendré

Dédou

Octobre 2010

La droite engendrée par un vecteur

Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$

L'ensemble des multiples de v constitue une droite, la droite engendrée par v.

Exemple

Le point $(2, 4, -2)$ est sur la droite engendrée par le vecteur $(1, 2, -1)$.

Exo 1

Choisissez un vecteur de $\mathbb{R}^4$, et indiquez deux points de la droite engendrée par ce vecteur.

Le plan engendré par deux vecteurs

Soit v et w deux vecteurs non proportionnels de $\mathbb{R}^n$

L'ensemble des combinaisons linéaires de v et w constitue un plan, le plan engendré par v et w.

Exemple

Le point $(2, 4, -3)$ est dans le plan engendré par le vecteur $(1, 2, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

Exo 2

Choisissez deux vecteurs non proportionnels de $\mathbb{R}^4$, et indiquez deux points du plan engendré par ces deux vecteurs.

La construction Vect

Définition

Etant donné un système $(e_1, \cdots, e_m)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E, on note $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$ ou encore $< e_1, \cdots, e_m >$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $(e_1, \cdots, e_m)$:

$$\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m) := \{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m | \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}.$$

On dit aussi que $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$ est le sous-espace engendré par $(e_1, \cdots, e_m)$ et que les vecteurs $(e_1, \cdots, e_m)$ sont des générateurs de $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$ ou engendrent $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$.

Attention

Les vecteurs $(e_1, \cdots, e_m)$ sont des générateurs de $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$ pas les générateurs de $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$.

Multiplicité des générateurs : exemple

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(1, -2, 0)$ engendrent le plan d'équation $z = 0$, qui est aussi engendré par les deux vecteurs $(2, 2, 0)$ et $(1, 0, 0)$

Exo 3

Donnez un autre plan de $\mathbb{R}^3$ et deux systèmes de générateurs de votre plan.

Exemples de Vect

- Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Vect}((1,1))$ est la diagonale, et ça se dessine.
- Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Vect}((1,1),(1,-1))$ est $\mathbb{R}^2$ tout entier, et ça se dessine.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{Vect}((1,1,0))$ est une droite, et ça se dessine.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{Vect}((1,0,1),(1,0,0))$ est le plan d'équation $y = 0$ et ça se dessine.

Exo 4

Identifiez le sous-espace $< (0,1,1),(0,0-3) >$ de $\mathbb{R}^3$.

Génération

Définition

On dit que le système $(e_1, \cdots, e_m)$ de vecteurs de l' espace vectoriel E, est générateur si $< e_1, \cdots, e_m >$ est égal à E tout entier.

Exemple

Le système de trois vecteurs $((1,2),(2,4),(3,4))$ de $\mathbb{R}^2$ est générateur.

Exo 5

Donnez un système générateur de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.

Hérédité de la génération

Proposition

Tout système dont un sous-système est générateur est lui aussi générateur.

Exemple

Tout vecteur du plan (x, y) est combinaison linéaire de $(1, 0)$ et $(0, 1)$: $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$. A fortiori, tout vecteur du plan est combinaison linéaire de $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$:
$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) + 0(1, 1)$.

Preuve

Si tout vecteur de notre espace vectoriel est combinaison linéaire des vecteurs du petit système, il l'est a fortiori des vecteurs du grand système : il suffit pour le voir d'affecter les vecteurs superflus du coefficient 0.

Rang et génération

Théorème

Pour qu'un système de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ soit générateur, il faut et il suffit que son rang soit n.

Exemple

Le système facile $((1,2,3),(0,1,1),(0,2,4))$ est de rang 3 dans $\mathbb{R}^3$ donc générateur.

Exo 6

Le système facile $((1,2,3),(1,1,1),(0,2,4))$ est-il générateur ?