Systèmes linéaires sympas

Dédou

Octobre 2010

Systèmes archi-faciles

On peut dire qu'un système est archi-facile si dans chacune de ses équations apparaît une inconnue qui n'apparaît pas dans les autres.

Exemple

Le système suivant aux inconnues x, y, z, t, u, v est archi-facile :

$$\begin{cases} 2x + 4u + 2v = 1 \\ 7y - t + 2v = 2 \\ -z + t - u = 3 \end{cases}.$$

Exo 1

Donnez votre exemple de système archi-facile de 3 équations à 6 inconnues.

Rang des systèmes archi-faciles

Pour les systèmes archi-faciles,

le rang est égal au nombre d'équations.

Exo 2

Quel est le rang du système suivant ?

$$\left\{\begin{aligned} 2x + 4u + 2v &= 1 \\ 7y - t + 2v &= 2 \\ -z + t - u &= 3. \end{aligned}\right.$$

Compatibilité des systèmes archi-faciles

Les systèmes archi-faciles sont compatibles.

Ca se voit en résolvant le système :

Exemple

A gauche un système archi-facile, à droite une de ses résolutions :

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+2y+4u+2v=1 \\ -3z+t-u=3 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x=-y-2u-v+\frac{1}{2} \\ z=\frac{t}{3}-\frac{u}{3}-1 \end{array}\right.$$

Inconnues principales des systèmes archi-faciles

Pour résoudre le système archi-facile $\begin{cases} x + 3y + t = 1 \\ x + 5z - t = 2 \end{cases}$
on prend une inconnue principale par équation, qu'on choisit n'apparaissant pas ailleurs (ici y puis z). On n'est pas obligé, mais ce choix est le plus simple.

Résolution des systèmes archi-faciles

Pour achever la résolution du système
$$\begin{cases} x+3y+t=1 \\ x+5z-t=2 \end{cases}$$
on exprime les inconnues choisies précédemment (ici y et z) en fonction des autres (ici x et t).

Ici on trouve : $\begin{cases} y=\frac{1-x-t}{3} \\ z=\frac{2-x+t}{5} \end{cases}$.

Exo 3

Résoudre le système archi-facile aux inconnues x, y, z, t, u, v :

$$\begin{cases} 2x+3z+4u+2v=1 \\ 7y-2z-u=2 \end{cases}.$$

Systèmes archi-faciles camouflés

Un système peut être archi-facile sans que ça crève les yeux.

Exemple

Le système suivant aux inconnues x, y, z, t, u, v est archi-facile :

$$\left\{\begin{array}{r} 2x - y - 3z + 4v = 1 \\ 7x - 5z - u + 2v = 2 \\ x - z + t - v = 3 \end{array}\right. .$$

Exo 4

Donnez votre exemple de système archi-facile de 3 équations à 6 inconnues camouflé.

Systèmes progressifs : exemple

Le système

$$\left\{\begin{array}{r} 3z - 3t + 6u - 2v = 3 \\ 7y - 2z + 7t + 3u - 5v = 2 \\ 2x + 4y + 3z - 8t + 4u + 2v = 1 \end{array}\right.$$

est **progressif** : dans chaque équation apparaît une nouvelle inconnue (z puis y puis x).

Exo 5

Ecrivez un autre système progressif.

Rang des systèmes progressifs

Pour les systèmes progressifs,

le rang est égal au nombre d'équations.

On va le voir en résolvant.

Exo 6

Quel est le rang du système suivant ?

$$\begin{cases} 2x + 4u + 2v = 1 \\ 7y - t + 2v = 2 \\ -z + t - u = 3. \end{cases}$$

Compatibilité des systèmes progressifs

Les systèmes progressifs sont compatibles.

On va le voir en résolvant.

Exemple

A gauche un système progressif, à droite une de ses résolutions :

$$\left\{\begin{array}{r} 2y+4u+2v=1 \\ x-2y-3z+t-u=3 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} y=-2u-v+\frac{1}{2} \\ x=3z-t-3u-2v+4 \end{array}\right.$$

Inconnues principales des systèmes progressifs

Pour résoudre le système progressif

$$\begin{cases} 3z - t = 0 \\ 4y + z - u = 2 \\ 2x + y + 2z + t + v = 1 \end{cases}$$

on prend une inconnue principale par équation, la première qui "apparaît pour la première fois" (ici z puis y puis x).

Ce choix ne prétend pas être le seul possible.

Résolution des systèmes progressifs par substitution

Pour résoudre par substitution le système progressif

$$\begin{cases} 3z - t = 0 \\ 4y + z - u = 2 \\ 2x + y + 2z + t + v = 1 \end{cases}$$

on calcule z avec la première équation ($z = \frac{t}{3}$) , puis y avec la deuxième ($y = \frac{-z+u+2}{4}$) après quoi, dans la formule trouvée, on remplace z par la valeur trouvée ($y = \frac{-\frac{t}{3}+u+2}{4}$), et ainsi de suite.

Cette méthode nous amène à

empiler les dénominateurs.

Résolution des systèmes progressifs par combinaison linéaire

Pour résoudre par combinaison linéaire le système progressif

$$\left\{\begin{array}{r} 3z - t = 0 \\ 4y + z - u = 2 \\ 2x + y + 2z + t + v = 1 \end{array}\right.$$

on trouve un système archi-facile équivalent : ici on fait $E_2 := 3E_2 - E_1$ et la deuxième équation devient $12y + t - 3u = 6$; puis $E_3 := 12E_3 - E_2 - 8E_1$ et la troisième équation ne contient plus ni y ni z ; le nouveau système est archi-facile.

Cette méthode nous évite

d'empiler les dénominateurs.

Systèmes progressifs camouflés

On va dire qu'un système est progressif camouflé s'il devient progressif quand on réordonne convenablement ses équations. C'est le cas du suivant :

$$\left\{\begin{array}{r} 3x - 3z + 6u - 2v = 3 \\ x - y - 2z + 7t + 3u - 5v = 2 \\ 4y - 8z + 4u + 2v = 1 \end{array}\right.$$

Exo 7

Ecrivez un autre système progressif camouflé.

Résolution des systèmes progressifs camouflés

Les systèmes progressifs camouflés se résolvent comme les systèmes progressifs.

Exo 8

Résoudre le système

$$\begin{cases} 3x - 3z + 6u - 2v = 3 \\ x - y - 2z + 7t + 3u - 5v = 2 \\ 4y - 8z + 4u + 2v = 1 \end{cases}$$

Systèmes échelonnés

Le système

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + 4y + 3z - 8t + 4u + 2v = 1 \\ -2z + 7t + 3u - 5v = 2 \\ 6u - 2v = 3 \end{array}\right.$$

est **échelonné** : dans la i-ième équation, l'inconnue qui apparaît en premier n'apparaît plus dans les équations qui suivent.

Exo 9

Ecrivez un autre système échelonné.

Résolution des systèmes échelonnés

En mettant les équations dans l'ordre inverse, on voit que

tout système échelonné est progressif camouflé.

On sait donc résoudre les systèmes échelonnés : ils se résolvent comme les progressifs, mais en commençant par le bas.

Exo 10

Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + 4y + 3z - 8t = 1 \\ z + t = 0 \end{array}\right. .$$

Systèmes faciles

Dans le système $\left\{\begin{array}{r} 2x+4y+4t+2u=1 \\ 5x-3y-2z+3t-5u=2 \\ 3x+7y-6t-2u=3 \end{array}\right.$

l'inconnue z est **facile** parce qu'elle apparaît dans une équation et pas dans les autres, et la deuxième équation est **facile** parce qu'elle comporte une inconnue facile. Finalement le système est **facile** parce qu'il comporte une équation (et donc une inconnue) facile.

La notion de système facile est une notion maison, gardez-la pour vous.

Pour résoudre un système facile on peut mettre l'équation

et l'inconnue faciles en tête : $\left\{\begin{array}{r} -2z+5x-3y+3t-5u=2 \\ 2x+4y+4t+2u=1 \\ 3x+7y-6t-2u=3 \end{array}\right.$.

Systèmes faciles et systèmes archi-faciles

Un système archi-facile

c'est un système dont toutes les équations sont faciles.

Système dérivé d'un système facile

Si dans le système facile $\left\{\begin{array}{r} -2z+5x-3y+3t-5u=2 \\ 2x+4y+4t+2u=1 \\ 3x+7y-6t-2u=3 \end{array}\right.$.

on retire l'équation facile, il reste un système avec une équation et une inconnue de moins,

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+4y+4t+2u=1 \\ 3x+7y-6t-2u=3 \end{array}\right. .$$

qu'on peut appeler système dérivé du système initial.

Grand principe des systèmes faciles

Pour étudier un système facile, il suffit d'étudier son système dérivé.

Rang des systèmes faciles

Le rang d'un système facile

s'obtient en ajoutant 1 au rang de son système dérivé.

Exemple

Le système suivant est de rang 2 :

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y+3z=2 \\ y+2z=1 \\ 2y+4z=3 \end{array}\right. .$$

Exo 11

Quel est le rang du système

$$\left\{\begin{array}{r} -2z+5x-3y+3t-5u=2 \\ 2x+4y+4t+2u=1 \\ 3x+7y-6t-2u=3 \end{array}\right. .$$

Compatibilité des systèmes faciles

Un système facile est compatible ssi

son système dérivé l'est.

Exemple

Le système suivant est compatible :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z &=& 2 \\ 3y + 6z &=& 3 \\ 2y + 4z &=& 2 \end{array}\right. .$$

Exo 12

Le système suivant est-il compatible ?

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2z + 5x - 3y + 3t - 5u &=& 2 \\ 2x + 4y + 4t + 2u &=& 1 \\ 3x + 7y - 6t - 2u &=& 3 \end{array}\right. .$$

Inconnues principales des systèmes faciles

Pour un système facile

on prend comme inconnues principales l'inconnue facile (choisie) et les inconnues principales choisies pour le système dérivé.

Exemple

Pour le système facile suivant, on peut prendre comme inconnues principales x, y et z.

$$\left\{\begin{array}{r} -2z + 5x - 3y + 3t - 5u = 2 \\ 2x + 4y + 4t + 2u = 1 \\ 3x + 7y - 6t - 2u = 3. \end{array}\right.$$

Exo 13

Ecrivez un autre système facile de trois équations à cinq inconnues, et indiquez votre choix des inconnues principales.

Exemple de résolution des systèmes faciles

Pour résoudre $\begin{cases} x+y+z+3t=1 \\ y+z-4t=0 \\ y-z-6t=0 \end{cases}$

on résout le système dérivé $\begin{cases} y+z-4t=0 \\ y-z-6t=0, \end{cases}$

on trouve par exemple $\begin{cases} y=5t \\ z=-t, \end{cases}$

et l'équation facile donne $\quad x = 1-y-z-3t = 1-7t,$
d'où la résolution :

$$\begin{cases} x = 1-7t \\ y = 5t \\ z = -t. \end{cases}$$

Résolution des systèmes faciles

Pour résoudre un système facile

on résout le système dérivé, et, en cas de compatibilité, on conclut avec l'équation facile : on obtient une résolution du système facile en ajoutant à une résolution de son système dérivé la variante adéquate de l'équation facile (variante résolue en l'inconnue facile puis nettoyée).