Systèmes trois-deux

Dédou

Octobre 2010

Mon premier système à trois équations

Résoudre le système aux deux inconnues x et y :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \\ 2x - y = -1. \end{cases}$$

c'est calculer l'intersection de trois droites du plan.

Exo 1

a) Dessinez les trois droites correspondantes sur un même croquis.
b) Le système est-il compatible, autrement dit a-t-il une solution ?

Comment faire un système compatible ?

Si on prend trois droites "au hasard", elle n'auront pas de point commun. Comment faire pour qu'elles en ait un ? Y'a une grosse ficelle :
Je prends deux fois la même équation, ou, à peine plus subtil, je prends deux équations proportionnelles (et la troisième quelconque).

Exo 2

Utilisez cette grosse ficelle pour fabriquer un système compatible de trois équations à deux inconnues.

Une solution plus subtile

Je prends mes deux premières équations E_1 et E_2 "au hasard", par exemple $x + y = 1$ et $x - y = 1$ mais pour E_3 je prends une combinaison linéaire de E_1 et E_2 par exemple $3E_1 - 2E_2$. J'obtiens le système

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \\ x + 5y = 1. \end{cases}$$

qui est compatible.

Exo 3

Donnez un autre système compatible de trois équations à deux inconnues non proportionnelles deux à deux.

Le premier principe fondamental des systèmes d'équations

Le premier principe fondamental des systèmes d'équations s'énonce comme suit :

> On ne change pas les solutions d'un système en lui ajoutant une équation qui est combinaison linéaire des autres.

Evidemment, on peut le formuler à l'envers :

> On ne change pas les solutions d'un système en lui retirant une équation qui est combinaison linéaire des autres.

Et même ça se démontre !

Exo 4

Ecrivez une combinaison linéaire des équations $x^2 + y = 1$ et $x + y^2 = 3$.

La preuve du premier principe fondamental I

On traîte notre cas particulier de deux équations à deux inconnues et de la combinaison linéaire $E_3 := 3E_1 - 2E_2$, le cas général est pareil.
On a le système S

$$\begin{cases} A_1(x,y) = A_2(x,y) \\ B_1(x,y) = B_2(x,y) \end{cases}$$

et le système S'

$$\begin{cases} A_1(x,y) = A_2(x,y) \\ B_1(x,y) = B_2(x,y) \\ 3A_1(x,y) - 2B_1(x,y) = 3A_2(x,y) - 2B_2(x,y) \end{cases},$$

et on doit montrer qu'ils ont les mêmes solutions. Pour cela, on doit montrer deux choses :

- que toute solution de S est solution de S', et
- que toute solution de S' est solution de S.

La preuve du premier principe fondamental II

Toute solution du grand système (S') est aussi solution du petit (S) :
en effet, si (x, y) vérifie toutes les équations de S', il vérifie aussi toutes les équations de S, puisque ce sont aussi des équations de S'.

La preuve du premier principe fondamental III

Toute solution du petit système (S) est aussi solution du grand (S') :
soit (x, y) vérifiant les deux équations de S. On a donc

$$A_1(x, y) = A_2(x, y) \text{ et } B_1(x, y) = B_2(x, y)$$

et on doit montrer que (x, y) vérifie les trois équations de S'.
Les deux premières étant dans S sont bien vérifiées.
La troisième,

$$3A_1(x, y) - 2B_1(x, y) = 3A_2(x, y) - 2B_2(x, y)$$

est une conséquence évidente deux premières.
Cqfd

La réciproque

On a donc trouvé une condition suffisante pour qu'un système de trois équations linéaires à deux inconnues, dont les deux premières ont une solution commune, ait une solution, c'est que la troisième équation soit combinaison linéaire des deux autres.
Et il y a une réciproque :

Théorème

Si un système de trois équations linéaires à deux inconnues a une solution, alors l'une de ces trois équations est combinaison linéaire des deux autres.

Quelle est l'équation superflue ?

Donc si notre système de trois équations linéaires à deux inconnues a une solution, l'une de ces trois équations est combinaison linéaire des autres, ok mais laquelle ?
Supposons par exemple que ce soit la seconde, E_2. On a donc $E_2 = aE_1 + bE_3$.

- si a (resp. b) est nul, E_2 et E_3 (resp. et E_1) sont proportionnelles.
- si au contraire a et b sont non-nuls, alors on a $E_1 = \frac{1}{a}E_2 - \frac{b}{a}E_3$ et $E_3 = \frac{1}{b}E_2 - \frac{a}{b}E_1$.

Conclusion

Si un système de trois équations linéaires à deux inconnues a une solution, soit deux de ces équations sont proportionnelles ; soit chacune de ces trois équations est combinaison linéaire des deux autres.