Systèmes trois-trois homogènes

Dédou

Octobre 2010

Mon premier système homogène à trois équations et trois inconnues

Résoudre le système aux trois inconnues x, y et z :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

c'est calculer l'intersection de trois plans dans l'espace.
Ces trois plans passent par l'origine (donc il y a toujours cette solution "triviale").
Les deux premières équations ne sont pas proportionnelles donc les deux premiers plans se coupent suivant une droite D. Donc deux cas peuvent se produire

- le troisième plan contient la droite D, qui, du coup, est l'ensemble des solutions.
- le troisième plan ne contient pas la droite D, auquel cas il ne coupe D qu'en 0, qui est la seule solution.

Systèmes faciles

Un système sera dit *facile* si l'une des inconnues n'apparaît que dans une équation.

Le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - z & = & 0 \\ x + 2y + z & = & 0 \\ x + 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

est facile.

Exo 1

Donnez un autre système facile.

Résolution d'un système facile

Pour résoudre un système facile,

- on résout le sous-système deux-deux
- on gère intelligemment la dernière inconnue.

Exo 2

Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - z & = & 0 \\ x + 2y + z & = & 0 \\ x + 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

Systèmes équivalents

On veut apprendre à remplacer un système pas facile par un système facile équivalent :

On dit que deux systèmes sont *équivalents* s'ils ont les mêmes solutions.

Exo 3

Donner un exemple de deux systèmes équivalents.

Le second principe fondamental des systèmes d'équations

Le second principe fondamental des systèmes d'équations s'énonce comme suit :

On ne change pas les solutions d'un système

- en multipliant une équation par un nombre *non-nul* ;
- en ajoutant à une équation un multiple d'une autre.

La méthode de Gauss

La méthode de Gauss pour nos systèmes consiste à appliquer le second principe fondamental pour remplacer le système donné par un système facile équivalent.