

Bases

Dédou

Octobre 2011

Base d'un sous-espace vectoriel

Définition

Une base d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , c'est un système générateur libre de ce sous-espace vectoriel .

Comme sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , on a \mathbb{R}^n tout entier, donc

Définition

Une base de \mathbb{R}^n , c'est un système libre qui engendre \mathbb{R}^n .

Rappels

- Par exemple “ (e_1, e_2, e_3) engendre V ” implique que : tout vecteur de V est combinaison linéaire de (e_1, e_2, e_3) .
- Par exemple “ (e_1, e_2, e_3) est libre” signifie que : aucun de ces vecteurs n'est combinaison linéaire des autres.

Bases de \mathbb{R}^2 : exemples

Exemples

Comme base de \mathbb{R}^2 , on a la base canonique $((1, 0), (0, 1))$ mais y en a plein d'autres, comme $((2, 3), (4, 5))$.

Ca s'écrit aussi en colonnes et ça se dessine.

Toutes les bases de \mathbb{R}^2

Proposition

- a) Tout système de deux vecteurs non proportionnels de \mathbb{R}^2 en est une base.
- b) Inversement toute base de \mathbb{R}^2 est constituée de deux vecteurs (non proportionnels).

Et ça se démontre. Mais nous, on a pas le temps.

Proposition

- a) Tout système libre de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 en est une base.
- b) Inversement toute base de \mathbb{R}^3 est constituée de trois vecteurs formant un système de rang trois.

Et ça se démontre. Mais nous, on a pas le temps.

Bases triangulaires supérieures de \mathbb{R}^3

Le système

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

est une base de \mathbb{R}^3 , puisque son rang est 3.

Bases triangulaires inférieures de \mathbb{R}^3

Le système

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

est une base de \mathbb{R}^3 , sa matrice est triangulaire (inférieure).

Le système

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

est une base de \mathbb{R}^3 , car son rang est trois (facile).

Le système

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

est une base de \mathbb{R}^3 , car son rang est trois (facile).

Proposition

- a) Tout système libre de n vecteurs de \mathbb{R}^n en est une base.
- b) Inversement toute base de \mathbb{R}^n est constituée de n vecteurs formant un système libre.

Et ça se démontre. Mais nous, on n'a pas le temps.

Proposition

La base canonique de \mathbb{R}^n en est bien une base.

Et ça se démontre. Mais nous, on n'a pas le temps.

Dégraissier en base : le problème

Problème

- On a un système de vecteurs d'un espace vectoriel,
- il engendre un sous-espace vectoriel E , et
- on veut extraire de ce système une base de E .

Réponse

C'est toujours possible :

on élimine l'un après l'autre ceux des vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres.

Quand on a fini, le système obtenu est encore générateur de E , et en plus il est libre, donc c'est une base de E .

Dégraissier en base : la méthode bourrin

La méthode bourrin

- Je pars des deux premiers vecteurs (si non proportionnels)
- je teste si le vecteur suivant est cb des précédents, si oui je le jette sinon je le prends
- et je recommence jusqu'à épuisement des vecteurs.

Critique

Si j'ai six vecteurs, cette méthode fait quatre fois Gauss.

On va voir qu'il suffit de faire une fois Gauss.

Dégraissier en base : exemple

Exemple

Extraire une base du système des lignes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Exo 1

Extraire une base du système des lignes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Engraisser en base : le problème

Problème : on a un système libre S d'un sous-espace vectoriel E , et on veut compléter S en une base de E .

Réponse : c'est toujours possible :

on ajoute à S , un par un,
des vecteurs de E qui font augmenter le rang du système.
Quand le nombre de vecteurs atteint la dimension de E ,
le système obtenu est toujours libre,
et en plus il est générateur, donc c'est une base de E .

Problème : où chercher ces vecteurs qu'on ajoute ?

Réponse : il suffit de puiser dans une base de E .

Comment engraisser un système libre

On le dit autrement :

Quand on a un système libre d'un sous-espace vectoriel E , pour trouver des vecteurs de E qui augmentent le rang du système, il suffit de les prendre dans une base de E .

Par exemple, si e_1 et e_2 sont deux vecteurs non proportionnels d'un sous-espace vectoriel E qui admet (b_1, b_2, b_3) comme base, alors l'un des trois systèmes

$$(e_1, e_2, b_1) \quad \text{ou} \quad (e_1, e_2, b_2) \quad \text{ou} \quad (e_1, e_2, b_3)$$

est une base de E .

Bases engraissées : exemple

Exo corrigé

Complétez $((1, 1, 1), (0, 1, 1))$ de deux façons en une base de \mathbb{R}^3 .

Exo 2

Complétez $((1, 0, 2), (2, 3, 4))$ de deux façons en une base de \mathbb{R}^3 .

Bases engraissées : conclusion

On le dit autrement :

Quand on a un système libre d'un sous-espace vectoriel E ,
pour le compléter en une base de E , c'est facile :

on lui ajoute l'un après l'autre les vecteurs d'une base de E , en ne gardant que ceux qui font augmenter le rang.

Le théorème de la base incomplète

On le dit encore autrement :

Théorème

Tout système libre peut être complété en une base par ajout de vecteurs choisis dans une base donnée.