Coordonnées

Dédou

Septembre 2011

Point de coordonnées données dans un repère

Etant donnés une origine O, deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non proportionnels dans notre plan, et deux nombres x et y, il existe un unique point M dont les coordonnées dans notre repère soient ces deux nombres. Ce point M vérifie l'équation vectorielle :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Point de coordonnées données dans un repère : exemple

Exemple

Quel est le point de coordonnées 1 et -2 dans le repère $(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$?

On a

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$$

et donc

$$M = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Point de coordonnées données dans un repère : exercice

Exo 1

Quel est le point de coordonnées 1 et 2 dans le repère $(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$?

Ligne ou colonne des coordonnées

Plutôt que de dire

"x et y sont les coordonnées de M dans ce repère",

on préfère insister sur le fait que l'ordre dans lequel on donne x et y est important et dire

"(x, y) est la ligne des coordonnées de M dans ce repère",

ou encore

"$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est la colonne des coordonnées de M dans ce repère".

L'équation caractéristique des coordonnées

Les coordonnées d'un point M de notre plan favori $\mathbb{R}^2$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont les deux nombres x et y qui vérifient l'équation *caractéristique des coordonnées* :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

La recherche des coordonnées est un problème de décomposition linéaire ; on veut savoir comment OM est combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Equations vectorielles

La recherche de coordonnées consiste donc à résoudre l'équation

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

où $O, M, \vec{i}, \vec{j}$ sont connus et x et y sont les inconnues.
Il s'agit d'une équation vectorielle : on demande que deux vecteurs soient égaux.

Comment aborde-t-on une équation vectorielle ?

L'égalité vectorielle

L'égalité des points (ou des vecteurs) du plan ne nous fait pas peur. On sait la ramener à des égalités entre nombres :

Deux points de $\mathbb{R}^2$ sont égaux ssi

ils ont même abscisse et même ordonnée.

Autrement dit, pour M et N quelconques dans $\mathbb{R}^2$,

$$M = N \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_M = x_N \\ y_N = y_N \end{array} \right. .$$

De même, deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont égaux ssi

ils ont même abscisse et même ordonnée.

Exo 2

Convertissez l'équation vectorielle $(1, x + y) = (x - y, x^2)$ en système d'équations numériques.

Recherche de coordonnées

Pour trouver les coordonnées d'un point dans un repère,

- on écrit l'équation (vectorielle) caractéristique
- on convertit cette équation en système numérique
- on résout ce système, qui a une solution unique
- la ligne solution est la ligne de coordonnées cherchée.

L'équation caractéristique des coordonnées : exemple

Exemple

Pour écrire le système caractéristique des coordonnées du point $M := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans le repère $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$,
on écrit $OM = x \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Les deux équations sont donc

$$0 = 0 \times x + 1 \times y, \qquad 2 = 1 \times x + 1 \times y$$

autrement dit

$$y = 0, \qquad x + y = 2.$$

Le système caractéristique des coordonnées : exercice

Exo 3

Ecrire le système caractéristique des coordonnées du point $M := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dans le repère $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$,

Coordonnées d'un point dans un repère : deuxième chance

Exo 4

Quelles sont les coordonnées de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans le repère $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$?