

Décomposition linéaire

Dédou

Septembre 2011

Problèmes de décomposition linéaire

Soient M, A, B, C quatre vecteurs dans notre espace vectoriel favori.

On veut parfois/souvent savoir

Est-ce que M est combinaison linéaire de A, B, C ?

Et si la réponse est positive,

on veut aussi savoir

Quels sont les coefficients de cette combinaison linéaire.

C'est un problème de décomposition linéaire (qualitatif ou quantitatif).

La méthode de décomposition linéaire

Pour ces deux problèmes, la méthode est la suivante :

- on choisit le nom des inconnues, par exemple x, y et z ;
- on écrit l'équation vectorielle $M = xA + yB + zC$;
- on convertit cette équation en système numérique ;
- pour le problème quantitatif, on doit trouver une solution de ce système ;
- pour le problème qualitatif, on doit seulement dire s'il y a une solution ou non.

La méthode de décomposition linéaire : exemple

Problème

Est-ce que $(1, 2, 3)$ est combinaison linéaire de $(4, 5, 6)$ et $(7, 8, 9)$?

Début de solution

On cherche donc x et y vérifiant $(1, 2, 3) = x(4, 5, 6) + y(7, 8, 9)$, autrement dit vérifiant le système de trois équations linéaires à deux inconnues :

$$\begin{cases} 1 & = & 4x + 7y \\ 2 & = & 5x + 8y \\ 3 & = & 6x + 9y. \end{cases}$$

Décomposition linéaire : exercice

Exo 1

Est-ce que $(1, 2, 1)$ est combinaison linéaire de $(4, 5, 4)$ et $(7, 8, 7)$?

Lignes et colonnes

Les choses sont plus claires si on écrit les vecteurs en colonnes :
L'équation vectorielle

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

équivalent au système :

$$\begin{cases} 1 = 4x + 7y \\ 2 = 5x + 8y \\ 3 = 6x + 9y. \end{cases}$$

Décomposition linéaire et système linéaire

On a compris que, pour traiter un problème de décomposition linéaire, on étudie un système linéaire. Ça marche aussi dans l'autre sens. Par exemple, le fait que le système

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x + 7y = 8 \\ 3x + 5y = 8 \end{cases}$$

n'a pas de solution signifie exactement que $(8, 8, 8)$ n'est pas combinaison linéaire de $(2, 5, 3)$ et $(3, 7, 5)$.

Exo 2

Interprétez en termes de combinaison linéaire le fait que le système

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 5x + 7y - 2z = 2 \end{cases}$$

a une solution.