Dimension des sous-espaces

Dédou

Octobre 2011

Dimension des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Définition

La dimension d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, c'est le nombre minimal de vecteurs dans un système de générateurs de ce sous-espace.

Définition

On dit "droite" pour "sous-espace de dimension 1" et "plan" pour "sous-espace de dimension 2".

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$, la diagonale $\mathrm{Vect}((1,1))$ est de dimension 1.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{Vect}((1,1,0),(1,-1,1))$ est de dimension 2.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $<(1,1,0),(1,-1,2),(1,0,1)>$ est de dimension 2.

Fausse dimension des sous-espaces vectoriels engendrés

L'idée

La dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$ engendré par $(e_1, \cdots, e_m)$ devrait être le nombre de générateurs m
Mais c'est faux ! il ne faut pas compter naïvement les générateurs.

Exo corrigé

Donnez un exemple de système de trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui n'engendrent qu'un plan.

Dimension des sous-espaces vectoriels engendrés

Théorème

La dimension du sous-espace vectoriel engendré par un système de vecteurs est le rang de ce système.

Exo corrigé

Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par un système de cinq vecteurs de rang 3 dans $\mathbb{R}^7$?

La dimension d'un noyau

L'idée

La dimension du sous-espace vectoriel des solutions d'un système de deux équations homogènes à six inconnues, c'est le nombre d'inconnues secondaires, ça devrait être 4.

Dimension (du sev des solutions) =
nombre d'inconnues -nombre d'équations.

Mais attention ! il ne faut pas compter naïvement les équations.

Exo corrigé

Donnez un exemple de système de trois équations homogènes à quatre inconnues dont l'ensemble des solutions est un plan.

Dimension des noyaux

La bonne formule

La dimension du sous-espace vectoriel des solutions d'un système d'équations homogènes est donnée par la formule :

Dimension (du sev des solutions) $=$
nombre d'inconnues -rang du système d'équations.

Exo corrigé

Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel des solutions du système ?

$$\begin{cases} x = y + u + v \\ z = y - u - v \end{cases}$$

Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

Comme sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, on a

- en dimension 0 :
  $\{0\}$, qui est l'ensemble des solutions de $x = y = z = 0$;
- en dimension 1 :
  les droites passant par 0, qui ont toutes un système de deux équations homogènes ;
- en dimension 2 :
  les plans passant par 0, qui ont tous une équation homogène ;
- en dimension 3 :
  $\mathbb{R}^3$ tout entier qui est l'ensemble des solutions de $0 = 0$.