Espaces vectoriels

Dédou

Décembre 2011

Nos espaces vectoriels passés

- On a déjà beaucoup travaillé avec les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ notamment, et on vient de voir d'autres exmples.
- On a compris que la spécificité des espaces vectoriels, c'est qu'on peut y faire des combinaisons linéaires, et que ça se passe bien.

On est peut-être mûr pour recevoir la définition d'espace vectoriel.

L'addition de $\mathbb{R}^2$

Pour se donner du courage, on passe en revue notre exemple phare $\mathbb{R}^2$, en commençant par son addition.

$$\begin{array}{cccc} Add_{\mathbb{R}^2} & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (v, v') & \mapsto & v + v' \\ & ((x,y),(x',y')) & \mapsto & (x+x', y+y'). \end{array}$$

La multiplication de $\mathbb{R}^2$

Et maintenant la multiplication :

$$\begin{array}{rccl} \mathit{Multex}_{\mathbb{R}^2} : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (\lambda, v) & \mapsto & \lambda . v \\ & (\lambda, (x, y)) & \mapsto & (\lambda x, \lambda y). \end{array}$$

La commutativité dans $\mathbb{R}^2$

Nos deux opérations vérifient un certain nombre de propriétés qui sont autant de règles de calcul.
La première est la commutativité de *Add*, qui dit que quand on additionne deux vecteurs, l'ordre n'importe pas :

Proposition

L'addition de $\mathbb{R}^2$ est commutative,
autrement dit :

$$(comm+) : \quad \forall v, w : \mathbb{R}^2, v + w = w + v.$$

Et ça se prouve !

Preuve de la commutativité dans $\mathbb{R}^2$

On prouve $\forall v, w : \mathbb{R}^2, v + w = w + v$.
Soient donc $v := (v_1, v_2)$ et $w := (w_1, w_2)$ deux vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^2$. On a, $v + w$

$$
\begin{aligned}
&= (v_1 + w_1, v_2 + w_2) && \text{(par définition de l'addition de } \mathbb{R}^2\text{)} \\
&= (w_1 + v_1, w_2 + v_2) && \text{(par commutativité de l'addition dans } \mathbb{R}\text{)} \\
&= w + v && \text{(par définition de l'addition de } \mathbb{R}^2\text{).}
\end{aligned}
$$

Cqfd.

L'associativité de l'addition dans $\mathbb{R}^2$

La deuxième propriété importante s'appelle l'associativité de *Add*. Elle qui dit que pour additionner trois vecteurs, on peut commencer par la droite ou par la gauche :

Proposition

L'addition de $\mathbb{R}^2$ est associative,
autrement dit :

$$(assoc+): \quad \forall v, w, x : \mathbb{R}^2, (v+w)+x = v+(w+x).$$

Exercice

Prouver cette associativité.

L'associativité de la multiplication dans $\mathbb{R}^2$

Pour la multiplication externe, il n'y a pas lieu à commutativité, puisque les deux arguments de cette opération n'ont pas le même type. En revanche il y a bien une sorte d'associativité :

Proposition

La multiplication externe de $\mathbb{R}^2$ est associative,
autrement dit :

$$(assoc: \quad \times) \forall x, y : \mathbb{R}, \forall v : \mathbb{R}^2, x.(y.v) = (xy).v.$$

Exercice

Prouver cette associativité.

La distributivité dans $\mathbb{R}^2$

Nos deux opérations sont compatibles en ce sens qu'on peut développer les produits, et ça s'appelle la distributivité :

Proposition

La multiplication externe de $\mathbb{R}^2$ est distributive par rapport à l'addition, autrement dit :
$(\textit{distrib}) : \ \forall x, y : \mathbb{R}, \forall u, v : \mathbb{R}^2, (x+y).(u+v) = x.u+x.v+y.u+y.v.$

Ici, on vient d'utiliser la convention de priorité standard, selon laquelle la multiplication (externe ou pas) est prioritaire sur l'addition (vectorielle ou pas), ce qui veut dire qu'on effectue les multiplications avant d'effectuer les additions ;
$x.u + x.v + y.u + y.v$ est donc un raccourci pour
$(x.u) + (x.v) + (y.u) + (y.v)$.

Exercice

Prouver cette distributivité.

Les neutres dans $\mathbb{R}^2$

Il y a encore trois règles pour le comportement des deux zéros et de 1. Dans cette affaire, comme zéros, on a le nombre réel zéro, et on a aussi l'origine $(0,0)$ de $\mathbb{R}^2$ aussi notée 0.
Voici les trois règles.

Proposition

On a

$$(O,0,1) : \forall u : \mathbb{R}^2, u+0=u \quad \text{et} \quad 0.u=0 \quad \text{et} \quad 1.u=u.$$

Exo

Démontrez ces trois règles.

Structures

Au vingtième siècle, les mathématiciens ont introduit un grand nombre de nouvelles structures reconnues d'utilité publique (par leurs pairs ...).
On introduit une nouvelle structure pour isoler l'essence de ce qu'ont en commun des situations mathématiques qu'on perçoit comme analogues.
L'introduction de la structure adéquate est un puissant moyen d'abstraction, qui permet un traitement unique pour toutes les situations concernées.
Dans le cas qui nous occupe, la structure d'espace vectoriel est la structure adéquate pour l'étude d'une classe fondamentale d'opérations, les combinaisons linéaires et d'une classe fondamentale d'applications, à savoir les applications linéaires.
On (re)verra plus loin en quel sens les applications linéaires sont celles qui sont compatibles avec la structure d'espace vectoriel.

Des couples aux quadruplets

Maintenant il faut dire ce que c'est qu'un espace vectoriel. C'est-à-dire qu'il faut dire ce que c'est que l'ensemble EV des espaces vectoriels. C'est un peu chaud.

La dernière fois qu'on a défini un ensemble, c'était l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et c'était un ensemble de couples. Heureusement, ces couples, c'était juste des couples de nombres réels. Alors on a juste dit : un vecteur de $\mathbb{R}^2$, c'est un couple de deux nombres réels.

Ici c'est bien plus compliqué : un espace vectoriel est un quadruplet et aucun des quatre ingrédients du quadruplet n'est un vulgaire nombre.

Quatre ingrédients et des conditions

Donc, au lieu d'être un couple, un espace vectoriel est un quadruplet, autrement dit il faut quatre ingrédients au lieu de deux ; bon, ça on peut gérer.

Ensuite la nature (c'est-à-dire le type fonctionnel) de ces ingrédients est très abstraite.

Pire que ça, le type fonctionnel des derniers ingrédients du quadruplet dépend du premier ingrédient.

Enfin, dernière complication, tous les quadruplets ne conviennent pas, il y a une sévère sélection.

Bon, tant pis, quand faut y aller, faut y aller.

Le premier ingrédient

Un espace vectoriel V est donc un quadruplet de quatre ingrédients.
Le premier ingrédient est un ensemble. Ce premier ingrédient s'appelle l'ensemble sous-jacent à l'espace vectoriel V. Il n'y a pas de notation standard pour cet ensemble sous-jacent. Nous le noterons parfois $|V|$. En réalité, ce qui se passe sur le terrain, c'est qu'on donne le même nom à l'espace vectoriel et à son ensemble sous-jacent, et malheur à ceux que ça induit en erreur.

Exemple

Pour notre exemple favori $\mathbb{R}^2$, l'ensemble sous-jacent est l'ensemble des couples de nombres réels.

Le second ingrédient

Donc on a déjà notre premier ingrédient, c'est un ensemble $|V|$. Le second ingrédient est de tout repos, c'est juste un élément de $|V|$. On l'appelle l'origine de V, et on le note O_V pendant quelque temps, après quoi on le note simplement O et malheur à ceux que ça induit en erreur.

Exemple

Pour notre exemple favori $\mathbb{R}^2$, l'origine est $(0, 0)$ aussi noté 0.

Le troisième ingrédient

Le troisième ingrédient est de type $E \times E \to E$. On l'appelle l'addition (vectorielle) de V et on la note $+_V$ pendant quelque temps, après quoi on la note simplement $+$ et malheur à ceux que ça induit en erreur. Il faut dire aussi qu'on adopte la notation dite infixée qui consiste à écrire $u +_V v$ (et donc bientôt $u + v$) au lieu de $+_V(u, v)$.

Exemple

Pour notre exemple favori $\mathbb{R}^2$, l'addition est celle qu'on a déjà abondamment utilisée.

Le dernier ingrédient

Le dernier ingrédient est de type $\mathbb{R} \times |V| \to |V|$. On l'appelle la multiplication (externe) de V et on la note $._V$ pendant quelque temps, après quoi on la note simplement ., voire pas du tout (comme la multiplication des nombres) et malheur à ceux que ça induit en erreur.

Exemple

Pour notre exemple favori $\mathbb{R}^2$, la multiplication externe est celle qu'on a déjà abondamment utilisée.

Les conditions pour être un espace vectoriel I

On a fait le plus dur, il ne reste qu'à formuler les conditions requises pour que notre quadruplet $V := (|V|, O_V, +_V, ._V)$ constitue un espace vectoriel. Ce sont exactement les conditions qu'on a observées dans $\mathbb{R}^2$, et qu'on reproduit en remplaçant simplement $\mathbb{R}^2$ par $|V|$. Par la même occasion, comme on l'a annoncé, on remplace O_V par O, $+_V$ par $+$, $._V$ par $.$ et même $|V|$ par V, et on applique les conventions de priorité expliquées à propos de $\mathbb{R}^2$.

Les conditions pour être un espace vectoriel II

$$(comm+) : \forall v, w : V, \quad v + w = w + v.$$

$$(assoc+) : \forall v, w, x : V, \quad (v + w) + x = v + (w + x).$$

$$(assoc\_mult) \forall x, y : \mathbb{R}, \forall v : V, \quad x.(y.v) = (xy).v.$$

$$(distrib) : \forall x, y : \mathbb{R}, \forall u, v : V, \quad (x+y).(u+v) = x.u+x.v+y.u+y.v.$$

$$(O, 0, 1) : \forall u : V, \quad u + O = u \quad \text{et} \quad 0.u = O \quad \text{et} \quad 1.u = u.$$

Structure d'espace vectoriel sur un ensemble donné

Etant donné un ensemble E, une structure d'espace vectoriel sur E est un triplet formant (avec E) un espace vectoriel d'ensemble sous-jacent E.

Autrement dit, c'est

- un triplet $(O, add, mult)$ avec
  - O de type E,
  - add de type $E \times E \to E$ et
  - $mult$ de type $\mathbb{R} \times E \to E$
- vérifiant les conditions de la page précédente.

Il n'y a pas toujours existence, et quasiment jamais unicité pour les structures d'espace vectoriel sur un ensemble donné.

Terminologie

Au lieu de

"choisir une structure d'espace vectoriel sur E",

on dit plutôt

"munir E d'une structure d'espace vectoriel".

Et on dit

"le triplet $(O, add, mult)$ munit E d'une structure d'espace vectoriel"

pour dire qu'il vérifie les conditions requises.