

Exemples d'espaces vectoriels

Dédou

Décembre 2011

Exemple : les fonctions trinômes

Un trinôme, c'est une fonction de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$.
Se donner ce trinôme, c'est pareil que se donner les réels a, b, c .

L'ensemble $\mathbb{R}_2[X]$ de tous les trinômes c'est presque pareil que \mathbb{R}^3 .

C'est un espace vectoriel de dimension 3.

- Comme origine, on a le trinôme nul $x \mapsto 0$.
- Comme opération interne on a l'addition des fonctions :

$$(P, Q) \mapsto (x \mapsto P(x) + Q(x)).$$

- Comme opération externe on a la multiplication des fonctions

$$(\lambda, P) \mapsto (x \mapsto \lambda P(x)).$$

On note X le polynôme $x \mapsto x$.

Manipulation de trinômes : exemple

Exo corrigé

Trouver le rang du système de trois trinômes
 $(X^2 + X + 1, 3X^2 - 1, X + 2)$.

Exo corrigé

Compléter $X^2 + 1$ en une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exo 1

Trouver le rang du système de trois trinômes
 $(X^2 + 2X + 1, X^2 + 5X + 6, X^2 - 1)$.

Manipulation de trinômes : exemple II

Exo corrigé

Trouver un repère cartésien de l'ensemble des trinômes P vérifiant

$$XP' - 2P = 1.$$

Exo corrigé

Trouver un repère cartésien de l'ensemble des trinômes P vérifiant

$$P(1) = 2.$$

Exo 2

Trouver un repère cartésien de l'ensemble des trinômes P vérifiant

$$P(1) = 2, P(3) = 4.$$

Exemple : les matrices

Une matrice à deux lignes et trois colonnes, c'est un tableau de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Se donner cette matrice, c'est pareil que se donner les six réels a, b, c, d, e, f .

L'ensemble $Mat_{2,3}$ de toutes ces matrices c'est presque pareil que \mathbb{R}^6 .

C'est un espace vectoriel de dimension 6.

Exemple : les matrices

- Comme origine, on a la matrice nulle

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Comme opération interne on a l'addition des matrices :

$$(M, N) \mapsto ((i, j) \mapsto M_{i,j} + N_{i,j}).$$

- Comme opération externe on a la multiplication externe des matrices

$$(\lambda, M) \mapsto ((i, j) \mapsto \lambda M_{i,j}).$$

Manipulation de matrices : exemple

Exo corrigé

Trouver le rang du système de trois matrices

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \right).$$

Exo 3

Trouver le rang du système de trois matrices

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Manipulation de matrices : exemple II

Exo corrigé

Trouver un repère cartésien de l'ensemble des matrices M à deux lignes et trois colonnes vérifiant

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

C'est quoi

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ?$$

Exo 4

Trouver un repère cartésien de l'ensemble des matrices M à deux lignes et trois colonnes vérifiant

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple : les fonctions affines

Une fonction affine à deux variables, c'est une fonction de la forme

$$(x, y) \mapsto ax + by + c$$

Se donner cette fonction, c'est pareil que se donner les trois réels a, b, c .

L'ensemble Aff_2 de toutes ces fonctions c'est presque pareil que \mathbb{R}^3 .

C'est un espace vectoriel de dimension 3.

Exemple : les fonctions affines

- Comme origine, on a la fonction nulle

$$(x, y) \mapsto 0.$$

- Comme opération interne on a l'addition des fonctions :

$$(f, g) \mapsto ((x, y) \mapsto f(x, y) + g(x, y)).$$

- Comme opération externe on a la multiplication externe des fonctions

$$(\lambda, f) \mapsto ((x, y) \mapsto \lambda f(x, y)).$$

On note abusivement c la fonction $(x, y) \mapsto c$, X la fonction $(x, y) \mapsto x$ et Y la fonction $(x, y) \mapsto y$.

Ainsi nos fonctions s'écrivent (sans \mapsto) $aX + bY + c$.

Manipulation de fonctions affines : exemple

Exo corrigé

Trouver le rang du système de trois fonctions affines

$$(X + 2Y + 3, 2X + 3Y + 4, 5X + 6Y + 7).$$

Exo 5

Trouver le rang du système de trois fonctions affines

$$(X + Y + 1, X + Y, X + Y - 1).$$

Manipulation de fonctions affines : exemple II

Exo corrigé

Trouver un repère cartésien de l'ensemble des fonctions affines f

$$f(2, 3) = 4.$$

Exo 6

Trouver un repère cartésien de l'ensemble des fonctions affines f vérifiant

$$f(1, 1) = 2 \quad \text{et} \quad f(1, -1) = 0.$$