Noyau et image des applications linéaires

Dédou

Novembre 2011

Noyau d'une application linéaire : définition

Définition

Si $f : E \to F$ est une application linéaire, son noyau, noté $Kerf$ est l'ensemble des vecteurs de E que f annule :

$$Kerf := \{v \in E | f(v) = 0\}.$$

Exemple

Le noyau de la projection $p := (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ sur son plan horizontal est l'axe vertical défini par $x = y = 0$.

Nature du noyau d'une application linéaire

Proposition

Le noyau d'une application linéaire de E dans F est un sous-espace vectoriel de E.

Et ça se prouve... trop facile !

Noyau et système linéaire homogène : exemple

Exemple

Le noyau de $f := (x, y, z) \mapsto (3x + 5y + 7z, 2x + 4y + 6z)$ est l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} 3x + 5y + 7z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0. \end{cases}$$

Le même dans l'autre sens

L'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} 3x + 5y + 7z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

est le noyau de l'application linéaire $(x, y, z) \mapsto (3x + 5y + 7z, 2x + 4y + 6z)$.

Noyau d'une application linéaire : exercice

Exo 1

a) Exprimez le noyau de $f := (x, y, z, t) \mapsto (3x + 7z - t, 2y + 6z)$ comme ensemble de solutions.

b) Exprimez l'ensemble des solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{c} 3x + 4t = 0 \\ y - z - t = 0 \\ 2x + y + z - t = 0 \end{array} \right.$$

comme noyau.

Base d'un noyau : exemple

Exo corrigé

Trouver une base du noyau de
$f := (x, y, z, t) \mapsto (x + 5y + 7t, 2x + 4y + 6z + t)$.

Base d'un noyau : exercice

Exo 2

Trouver une base du noyau de
$f := (x, y, z) \mapsto (x - y + z, -x + y - z)$.

Dimension d'un noyau : exemple

Exo corrigé

Trouver la dimension du noyau de
$f := (x, y, z, t) \mapsto (x + 5y + 7t, 2x + 4y + 6z + t)$.

C'est plus facile que trouver une base : c'est la dimension de départ diminué du rang de la matrice.

Base d'un noyau : exercice

Exo 3

Trouver la dimension du noyau de
$f := (x, y, z, t) \mapsto (x - y + z + t, -x + y - z + t, t)$.

Rappel : image d'une application

Rappel(?)

L'image d'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (par exemple) c'est l'ensemble des images

$$Imf := \{f(v) | v \in \mathbb{R}^2\}$$

ou encore

$$Imf := \{w \in \mathbb{R}^3 | \exists v \in \mathbb{R}^2, w = f(v)\}.$$

Image d'une application linéaire

Définition

Si $f : E \to F$ est une application linéaire, son image, notée Imf, est donc l'ensemble des vecteurs de F de la forme $f(v)$ avec $v \in E$:

$$Imf := \{f(v) | v \in E\}.$$

Exemple

L'image de la projection $p := (x, y, z) \mapsto (x, y)$ de $\mathbb{R}^3$ sur son plan horizontal est justement ce plan horizontal, d'équation $z = 0$.

Nature de l'image d'une application linéaire

Proposition

L'image d'une application linéaire de E dans F est un sous-espace vectoriel de F.

Et ça se prouve... trop facile !

Image d'une application linéaire et colonnes de sa matrice

Exemple

L'application linéaire $f := (x, y, z) \mapsto (3x + 5y + 7z, 2x + 4y + 6z)$ s'écrit aussi

$$f := (x, y, z) \mapsto x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Sous cet angle on voit (?) que les vecteurs de l'image de f sont exactement les combinaisons linéaires du système de trois vecteurs $((3, 2), (5, 4), (7, 6))$:

$$Im \;\; (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 3x + 5y + 7z \\ 2x + 4y + 6z \end{pmatrix} \quad = \quad < \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} > .$$

Moralité

L'image de f est le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de sa matrice.

Image d'une application linéaire : exemple

Exo corrigé

Donnez des générateurs de l'image de
$(x, y) \mapsto (3x + 7y, 2y, x - y)$.

Image d'une application linéaire : exo

Exo 4

Donnez des générateurs de l'image de $(x, y, z) \mapsto (3x + 7y, 2y + z, x - y, x + z)$.

Base de l'image d'une application linéaire : exemple

Exo corrigé

Donnez une base de l'image de
$(x, y, z) \mapsto (x + y + 2z, y - z, x + 3y)$.

On prend les générateurs comme on sait faire, et on enlève ceux qui sont en trop.

Exo 5

Donnez une base de l'image de
$(x, y, z) \mapsto (x + y, y - z, x + z, x + 2y - z)$.

Equations de l'image d'une application linéaire : exemple

Exo corrigé

Donnez un système d'équations pour l'image de
$(x, y) \mapsto (x + y, y, 2x - y, x + 3y)$.

On sait trouver des générateurs, et à partir des générateurs, on sait trouver des équations.

Equations de l'image d'une application linéaire : exo

Exo 6

Donnez un système d'équations pour l'image de
$(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y + z, 3y, 2x + 3y + 2z)$.

Dimension de l'image d'une application linéaire : exemple

Exo corrigé

Calculer la dimension de l'image de
$(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y + z, 3y, 2x + 3y + 2z)$.

C'est le rang du système des colonnes de la matrice, donc c'est le rang de la matrice.

Equations de l'image d'une application linéaire : exo

Exo 6

Calculer la dimension de l'image de
$(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - 2y + z, x + 2y + 3z, 2x + 3y - z)$.