

Matrices (canoniques) des applications linéaires

Dédou

Novembre 2011

Rappel : matrice d'un système linéaire

La matrice du système d'équations

$$\begin{cases} 8x + 3y + 5z = 1 \\ 2x + 4y + 7z = 2 \end{cases}$$

c'est

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Matrice d'une application linéaire

La matrice de l'application linéaire

$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 8x + 3y + 5z \\ 2x + 4y + 7z \end{pmatrix}$$

c'est aussi

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Application linéaire déterminée par une matrice : exemple

L'application linéaire est déterminée par sa matrice
et la matrice tient beaucoup moins de place.

Exemple

L'application linéaire de matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est

$$(x, y, z, t) \mapsto \begin{pmatrix} 3x + z + 2t \\ 4x + 3y + t \end{pmatrix}.$$

Exo 1

Ecrivez l'application linéaire de matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nombre de lignes et de colonnes

La matrice d'une application linéaire de \mathbb{R}^q dans \mathbb{R}^p a p lignes et q colonnes.

C'est pour ça qu'on a toujours mis q avant p .

Exo corrigé

Combien de lignes a la matrice d'une application linéaire de \mathbb{R}^7 dans \mathbb{R}^9 ?

Colonnes de la matrice d'une application linéaire

L'application linéaire f de matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est aussi

$$(x, y, z, t) \mapsto x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'image par f du premier vecteur $(1, 0, 0, 0)$ de la base canonique c'est la première colonne de la matrice.

L'image par f du deuxième vecteur $(0, 1, 0, 0)$ de la base canonique c'est la deuxième colonne de la matrice.

Et ainsi de suite.

Calcul de la matrice d'une application linéaire : exemple

Exo corrigé

Trouver la matrice de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ vérifiant $f(1, 0, 0) = (2, 3, 4, 5)$, $f(0, 1, 0) = (6, 5, 4, 3)$ et $f(3, 2, 1) = (0, 2, 1)$.

Exo 2

Trouver la matrice de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant $f(1, 1) = (2, 4, 5)$ et $f(0, 1) = (2, 1, 1)$.