Rang des matrices

Dédou

Octobre 2011

Matrice d'un système

Le rang du système d'équations

$$\begin{cases} 8x + 3y + 5z = 1 \\ 2x + 4y + 7z = 2 \end{cases}$$

ne dépend que du système des coefficients

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

qu'on appelle **matrice** du système linéaire.

Exo 1

Ecrivez la matrice du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y & = & 5 \\ 4x - 5y & = & 4 \\ 6x + 7y & = & 7. \end{cases}$$

Système homogène associé à une matrice

Inversement, toute matrice provient d'un unique système linéaire homogène.

Exemple

A gauche une matrice, et à droite le système homogène correspondant.

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad \left\{ \begin{array}{rcr} 8x+2y & = & 0 \\ 2x+4y & = & 0 \\ 5x+7y & = & 0. \end{array} \right.$$

Exo 2

Ecrivez le système linéaire homogène dont la matrice est :

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rang d'une matrice

Par définition

le rang d'une matrice est celui du système homogène associé.

Exemple

La matrice suivante a pour rang 3 (le système correspondant est facile) :

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Exo 3

Quel est le rang de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Rang des matrices

Les méthodes de calcul du rang

passent sans changement des systèmes linéaires homogènes aux matrices.

On va en profiter pour les passer en revue.

Règles de calcul du rang des systèmes de vecteurs

Le rang d'une matrice ne change pas

- quand on change l'ordre des lignes
- quand on multiplie (ou divise) une ligne par un nombre non nul
- quand on ajoute (ou retranche) à une ligne une combinaison des autres
- quand on ajoute (ou retranche) à la matrice une nouvelle ligne qui est combinaison linéaire des antres.

Le rang d'une matrice augmente de 1

quand on lui ajoute une ligne qui n'est pas combinaison linéaire des autres.

Le rang d'une matrice est égal au nombre de ses lignes

sauf si l'une d'entre elles est combinaison linéaire des autres.

Matrices faciles

On dira qu'une matrice est facile

si l'une de ses colonnes a tous ses nombres nuls sauf exactement un.

Exemple

La matrice suivante est facile :

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrices dérivée d'une matrice facile

A gauche une matrice facile, et à droite une de ses deux matrices dérivées :

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice dérivée s'obtient en barrant la ligne et la colonne adéquate.

Exo 4

Ecrivez l'autre matrice dérivée de la matrice ci-dessus.

Rang des matrices faciles

Le rang d'une matrice facile

s'obtient en ajoutant 1 au rang de l'une de ses matrices dérivées.

La méthode de Gauss pour le rang des matrices

Exemple

On a

$$\mathit{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathit{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & -3 \end{pmatrix} = 3.$$

On a fait $E_2 := E_2 - E_1$ et $E_3 := E_3 - 2E_1$. La matrice dérivée est de rang deux parce que ses deux lignes ne sont pas proportionnelles.

Exo 5

Calculer intelligemment

$$\mathit{rang}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notion formelle de matrice

Une matrice à p lignes et q colonnes

c'est une application de $[1..p] \times [1..q]$ vers $\mathbb{R}$.