

# Plans de l'espace

Dédou

Octobre 2011

# L'espace (numérique) de dimension 3

On a beaucoup travaillé dans  $\mathbb{R}^2$

Les points de  $\mathbb{R}^2$  sont les couples de deux nombres.

On va maintenant travailler dans  $\mathbb{R}^3$

Les points de  $\mathbb{R}^3$  sont les triplets formés de trois nombres.

Exemples

$(6, 7, 8)$  est un point de  $\mathbb{R}^3$  et  $(8, 7, 6)$  en est un autre.

# Un plan de l'espace, c'est quoi ? I

Un plan de l'espace est une partie de cet espace, mais pas n'importe laquelle : comme autres parties, il y a par exemple les sphères, les droites, les demi-espaces.

## Exo oral

Quel genre de partie de  $\mathbb{R}^3$  est  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 5\}$  ?

## Un plan, c'est quoi ? II

Comme plans de  $\mathbb{R}^3$ , on connaît un peu les graphes des fonctions affines.

### Exemple

Le graphe de

$$(x, y) \mapsto 2x + 3y - 6$$

est le plan d'équation

$$z = 2x + 3y - 6.$$

Et ça se dessine.

### Attention

On parle ici de fonction de deux variables.

# Fonctions et graphes : écriture

## Rappel

On écrit les fonctions avec  $\mapsto$  et les graphes avec  $\{\dots | \dots\}$ .

## Exemples

$$(x, y) \mapsto 2x + 3y - 6$$

est une fonction. Et

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 2x + 3y - 6\}$$

est son graphe.

## Equation des graphes : exemple

On sait donc donner une équation pour le graphe d'une fonction de deux variables.

### Exemple

Le graphe de la fonction

$$(x, y) \mapsto 3x - 2y + 5$$

est le plan d'équation

$$z = 3x - 2y + 5.$$

# Equation des graphes : exo

## Exo 1

Donner une équation du graphe de  $(x, y) \mapsto -2x + 3y - 1$ .

# Reconnaître un graphe

Inversement, étant donné un plan par une équation, on peut y reconnaître le graphe d'une fonction.

## Exemple

Le plan d'équation

$$2x + 3y + 4z = 5$$

est le graphe de la fonction

$$(x, y) \mapsto -\frac{x}{2} - \frac{3y}{4} + \frac{5}{4}.$$

# Reconnaître un graphe

## Exo 2

Donner une fonction dont le plan d'équation

$$5x - 2y - 4z = 8$$

est le graphe.

## Un plan, c'est quoi ? III

Tous les plans de  $\mathbb{R}^3$  ne sont pas des graphes,  
il y a en plus les plans verticaux,

### Exemple

Dans  $\mathbb{R}^3$  le plan d'équation  $x + 2y = 3$  est vertical.

## Un plan, c'est quoi? IV

Au total, un plan (de  $\mathbb{R}^3$ ), c'est une partie (de  $\mathbb{R}^3$ ) de la forme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz + d = 0\}$$

avec  $a, b, c, d$  réels et  **$a$  ou  $b$  ou  $c$  non nul**.

On dit que ce plan est le plan d'équation  $ax + by + cz + d = 0$ .

### Attention

Dans  $\mathbb{R}^3$  ce sont les plans et non plus les droites qui sont définis par une équation linéaire.

# Unicité de l'équation I

L'équation d'un plan n'est pas unique, même si on impose la forme  $ax + by + cz + d = 0$ .

## Exemple

Le plan d'équation  $x + 2y + 3z + 4 = 0$  a aussi pour équation  $2x + 4y + 6z + 8 = 0$ .

## Unicité de l'équation II

L'équation d'un plan devient unique, si on impose la forme  
 $z = ax + by + c$ .

Mais cette forme ne convient pas à tous les plans : plus précisément les plans verticaux n'ont pas d'équation de cette forme.