Résolution des systèmes linéaires

Dédou

Octobre 2011

Exercice

Exo 1

Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{r} 2x + y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ x + 2z = 5, \end{array} \right.$

Résolution d'un système linéaire : exemple

Résoudre le système linéaire suivant aux inconnues x, y, z, t, u, v

$$(S)\left\{\begin{aligned} 2x+3y+4z+2v &= 1\\ 5x+7y-2z-4t-u &= 2\\ 3x-t-u-v &= -4\\ x-y-z+t-v &= 3 \end{aligned}\right.$$

c'est donner un système **résolu** équivalent à S, comme par exemple

$$(S')\left\{\begin{aligned} y &= -(2x+18t-39)/15\\ z &= -(21x+14t-33)/15\\ u &= -(9x+46t-177)/15\\ v &= (54x+31t-117)/15 \end{aligned}\right. .$$

On dit alors que S' est une résolution de S.

Systèmes équivalents (rappel)

Deux systèmes d'équations aux mêmes inconnues sont dits équivalents ssi

ils ont exactement les mêmes solutions.

Symétrie de l'équivalence

L'équivalence est symétrique :

Si S' est équivalent à S, alors S est équivalent à S'.

C'est pour ça qu'on dit volontiers

$$S \text{ et } S' \text{ sont équivalents}$$

ce qui suggère que l'ordre entre S et S' est sans importance.

Réflexivité de l'équivalence

L'équivalence est réflexive :

Tout système est équivalent à lui-même.

Les mathématiciens aiment bien ce genre d'observation dont l'intérêt ne crève pas les yeux, et surtout pas ceux du boulet de base.

Transitivité de l'équivalence

L'équivalence est transitive

Si deux systèmes sont équivalents à un même troisième, ils sont équivalents entre eux.

Ah, ça au moins, c'est pas de la contemplation de nombril, ça a une chance de servir à quelque chose.

Systèmes résolus

Le système linéaire

$$\begin{cases} y = -(2x + 18t - 39)/15 \\ z = -(21x + 14t - 33)/15 \\ u = -(9x + 46t - 177)/15 \\ v = (54x + 31t - 117)/15 \end{cases}$$

est résolu parce qu'il exprime certaines inconnues (en l'occurrence y, z, u, v) en fonction des autres (en l'occurrence x et t).

Résolution d'un système linéaire : cas général

En principe, résoudre un système linéaire, c'est

- montrer qu'il n'a pas de solution, ou alors
- en exhiber une résolution (en justifiant).

En pratique, on applique la méthode dite "du pivot de Gauss" dont on prouve une fois pour toutes qu'elle produit un système équivalent, qui est manifestement soit impossible soit résolu.

Systèmes compatibles

On dit qu'un système d'équations est

compatible s'il a une solution , et incompatible dans le cas contraire.

On peut le faire !

S'il fallait vraiment, on saurait démontrer le

théorème

Tout système linéaire compatible admet une résolution.

Inconnues principales et secondaires

Dans le système résolu

$$\begin{cases} y = -(2x + 18t - 39)/15 \\ z = -(21x + 14t - 33)/15 \\ u = -(9x + 46t - 177)/15 \\ v = (54x + 31t - 117)/15 \end{cases}$$

on dit que y, z, u, v sont les inconnues principales et x et t les inconnues secondaires.

Non-unicité de la résolution

Il n'y a pas unicité de la résolution, et, pour un même système, une inconnue peut-être principale dans une résolution et secondaire dans une autre.

Exo 2

Pour le système

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

donnez une résolution où x est inconnue principale et une où x est inconnue secondaire.

Unicité de la résolution

Mais une fois qu'on a choisi les inconnues secondaires, ou les principales (ça revient au même), la résolution, si elle existe, est unique (à l'ordre des équations près).
Par exemple les deux systèmes résolus

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 3x + 4t \\ z = 5x + 7t \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 5x + 4t \\ z = 5x + 7t \end{array} \right.$$

ne sont pas équivalents puisque le premier a la solution $(1, 3, 5, 0)$, que le second n'a pas.

Exo 2

Donnez une solution du système de gauche qui n'est pas solution du système de droite :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = y + u + v \\ z = y - u - v \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = y + u - v \\ z = y - u - v \end{array} \right.$$