

# Equations linéaires à trois inconnues

Dédou

Octobre 2011

# Résoudre une équation de plan

Une équation de plan a une infinité de solutions, on ne peut pas toutes les écrire.

Résoudre une équation de plan,

c'est choisir une inconnue qu'on exprime en fonction des deux autres.

On dit que la première est notre inconnue **principale** et que les deux autres sont nos inconnues **secondaires**.

# Résoudre en $z$ une équation de plan

## Exemple

Considérons le plan d'équation

$$2x + 3y + 4z + 5 = 0.$$

Cette équation est équivalente à

$$z = -\frac{x}{2} - \frac{3y}{4} - \frac{5}{4}.$$

C'est l'équation **résolue en**  $z$  de ce plan.

## Exo 1

Donner l'équation résolue en  $x$  du plan d'équation

$$5x - 3y - 4z + 1 = 0.$$

## Le choix de l'inconnue principale

On peut résoudre en  $y$  (par exemple)  
seulement si  $y$  “apparaît” dans l'équation.

# Résoudre une équation de plan avec paramètre : exemple

## Exemple

On considère l'équation dépendant du paramètre  $m$

$$mx + (m^2 + 1)y - mz = 1.$$

On peut la résoudre en  $y$  pour toutes les valeurs de  $m$ .

Mais on ne peut la résoudre en  $x$  (ou en  $z$ ) que pour  $m \neq 0$ .

# Résoudre une équation de plan avec paramètre : exemple

## Exemple

On considère l'équation dépendant du paramètre  $m$

$$mx + (m + 1)y - (m + 2)z = 1.$$

Pour  $m \neq 0$ , on peut prendre  $x$  comme inconnue principale et l'équation se résout en

$$x = -\frac{(m + 1)y}{m} + \frac{(m + 2)z}{m} + \frac{1}{m}.$$

Mais pour  $m = 0$  il faut prendre  $y$  ou  $z$  comme inconnue principale et l'équation se résout (par exemple) en

$$y = 2z + 1.$$

# Résoudre une équation de plan avec paramètre : exo

## Exo 2

Résoudre l'équation

$$(m + 1)x + (m + 3)y + (m + 2)z = m$$

selon la valeur du paramètre  $m$ .

# Résoudre une équation de plan : unicité

Un plan de  $\mathbb{R}^3$  a au plus

une équation résolue en  $x$ , une équation résolue en  $y$ , et une équation résolue en  $z$ .

C'est pour ça qu'on parle de l'équation résolue en  $x$  ou l'équation résolue en  $z$  d'un tel plan .



# Résoudre une équation de plan avec paramètre : exemple

## Exo résolu

Pour quelles valeurs du paramètre  $m$  l'équation

$$(m + 1)x + (m^2 - 1)y + (m^3 + 1)z = 0$$

définit-elle un plan ?

## Réponse

les coefficients  $m + 1$ ,  $m^2 - 1$  et  $m^3 + 1$  de  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans l'équation donnée ne s'annulent ensemble que pour  $m = -1$ . Donc c'est pour  $m \neq -1$  que cette équation définit bien un plan.

## Exo 3

Pour quelles valeurs du paramètre  $m$  l'équation

$$(m - 1)x + (m^2 - 1)y + (m + 1)z = 1$$

définit-elle un plan ?

# Equation dégénérée I

## Exo résolu

Résoudre l'équation

$$(m + 1)x + (m^2 - 1)y + (m^3 + 1)z = 2$$

pour  $m = -1$ .

## Réponse

Pour  $m = -1$  l'équation devient  $0 = 2$ . Elle n'a pas de solution. Autrement dit l'ensemble de ses solutions est vide.

# Equation dégénérée II

## Exo résolu

Résoudre l'équation

$$(m - 1)x + (m^2 - 1)y + (m^3 - 1)z = m^4 - 1$$

pour  $m = 1$ .

## Réponse

Pour  $m = 1$  l'équation devient  $0 = 0$ . L'ensemble de ses solutions est l'espace  $\mathbb{R}^3$  tout entier.

## Résoudre une équation avec paramètre : exo

### Exo 4

Résoudre, selon la valeur du paramètre  $m$ , l'équation

$$(m + 1)x + (m^2 - 1)y + (m + 1)z = m^3 - 1.$$