

# Sous-espaces affines

Dédou

Novembre 2011

# Structure de l'ensemble des solutions d'un système homogène

## Rappel

On a compris que l'ensemble des solutions d'un système d'équations homogènes est une partie bien particulière du  $\mathbb{R}^n$  concerné : c'est **un sous-espace vectoriel**.

## Question

Et si les équations ne sont pas homogènes ?

# Combiner des solutions d'un système linéaire I

Pas besoin de beaucoup d'équations pour voir ce qui se passe.

## Exemple

On considère l'équation linéaire :

$$x + 2y + 2z + 3t = 5.$$

Je vois deux solutions  $s_1 := (1, 2, 0, 0)$  et  $s_2 := (0, 0, 1, 1)$ .

Maintenant je fais une combinaison linéaire au hasard

$$s := 3s_1 + 2s_2 = (3, 6, 2, 2)$$

et je ne tombe pas sur une nouvelle solution.

## Combiner des solutions d'un système linéaire II

On va juste rectifier le tir.

### Exemple

On considère toujours l'équation linéaire :

$$x + 2y + 2z + 3t = 5.$$

avec ses deux solutions  $s_1 := (1, 2, 0, 0)$  et  $s_2 := (0, 0, 1, 1)$ .

Cette fois on fait la combinaison linéaire

$$s := 3s_1 - 2s_2 = (3, 6, -2, -2)$$

et ça marche !

Le truc est que la combinaison linéaire est barycentrique : la somme des coefficients est 1.

## Combiner des solutions d'un système linéaire III

### Proposition

Soit  $S$  un système d'équations linéaire à  $n$  inconnues, et soient  $s$  et  $s'$  (dans  $\mathbb{R}^n$ ) deux solutions de  $S$ . Alors toute combinaison linéaire barycentrique de  $s$  et  $s'$  est encore solution de  $S$ .

Ca se démontre...

# On le dit un peu autrement

## Proposition

L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires à  $n$  inconnues est une partie de  $\mathbb{R}^n$  qui est stable par passage au barycentre.

# Sous-espaces affines : définition

## Définition

Dans un espace vectoriel, un sous-espace affine est une partie stable par passage au barycentre.

# Sous-espaces affines : exemples

## Exemples

Droites de  $\mathbb{R}^2$ , droites et plans de  $\mathbb{R}^3$ .



## Proposition

L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires à  $n$  inconnues est un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^n$ .

Et la réciproque est vraie !

## Théorème

Tout sous-espace affine de  $\mathbb{R}^n$  est l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires à  $n$  inconnues.

# Translations

## Définition

Dans  $\mathbb{R}^n$ , la translation de vecteur  $a$  est l'application  $v \mapsto v + a$ .

## Exemple

Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (x + 1, y + 2)$  est la translation de vecteur  $(1, 2)$ .

# Sous-espaces vectoriels et translations I

L'image d'un sous-espace vectoriel par une translation n'est en général pas un sous-espace vectoriel.

## Exemple

Dans  $\mathbb{R}^2$ , l'image de la droite d'équation  $y = x$  par la translation de vecteur  $(1, 2)$  est la droite d'équation  $y = x + 1$ .  
Ce n'est pas un sous-espace vectoriel.

# Sous-espaces affines et translations II

## Proposition

L'image d'un sous-espace vectoriel par une translation est un sous-espace affine.

Et la réciproque est presque vraie !

## Théorème

Tout sous-espace affine non vide de  $\mathbb{R}^n$  est l'image d'un (unique) sous-espace vectoriel par une translation.

Ca se démontre... mais on préfère le dire autrement.

# Sous-espaces affines parallèles

## Définition

On dit que deux sous-espaces affines sont parallèles si l'un est l'image de l'autre par une translation.

## Proposition-définition

Tout sous-espace affine non vide de  $\mathbb{R}^n$  est parallèle à un unique sous-espace vectoriel. Ce sous-espace vectoriel s'appelle la **direction** du sous-espace affine.

## Exemple

Dans  $\mathbb{R}^2$ , la direction de la droite d'équation  $y = 2x + 3$  est la droite d'équation  $y = 2x$ .

## Cas d'un ensemble de solutions : exemple

### Exemple

Dans  $\mathbb{R}^2$ , la direction de la droite d'équation  $y + 2x = 3$  est l'équation homogène associée  $y + 2x = 0$ .

C'est un phénomène général.

# Cas d'un ensemble de solutions

## Proposition

Soit  $S$  un système d'équations linéaires compatible et  $S_0$  le système homogène associé. Alors la direction du sous-espace affine des solutions de  $S$  est le sous-espace vectoriel des solutions de  $S_0$ .

# Solution particulière et solution générale

## Slogan

On obtient la solution générale d'un système d'équations linéaires (compatible) en ajoutant à une solution particulière la solution générale du système homogène associé.

## Pratiquement

Pour spécifier un sous-espace affine (de solutions ?) on en donne un point (origine ?) et une base de la direction.



## Définition

Un repère cartésien d' un sous-espace affine  $A$  est constitué d' un point de  $A$  et d' une base de la direction de  $A$ .

## Exemple

Un repère cartésien du plan d'équation  $x + 2y + 3z = 5$  dans  $\mathbb{R}^3$  est  $((0, 1, 1); (3, 0, -1), (2, -1, 0))$ .

## Exo 1

Donner un repère cartésien du plan d'équation  $2x + 3y + 4z = 6$  dans  $\mathbb{R}^3$ .