Sous-espaces affines : le retour

Dédou

Novembre 2011

Au coeur de l'algèbre linéaire

La notion de sous-espace affine

est une variante facile de celle de sous-espace vectoriel.

On en refait le tour.

Une définition (ou plusieurs équivalentes ?)

Définition

Dans un espace vectoriel ($\mathbb{R}^n$), un sous-espace affine est une partie stable par combinaison linéaire barycentrique.

Constructions de sous-espaces affines

Comme la notion de sous-espace vectoriel

la notion de sous-espace affine fédère deux constructions apparemment très différentes.

Qu'on va revisiter. Mais d'abord on parle de dimension.

Dimension des sous-espaces affines

La dimension d'un sous-espace affine non-vide de $\mathbb{R}^n$

c'est la dimension de sa **direction**.

La direction c'est le sous-espace vectoriel parallèle.

La construciton Aff

Le sous-espace affine engendré par m points

L'ensemble $<< e_1, \cdots, e_m >>$ des combinaisons linéaires barycentriques d'un système de points de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$.

On l'appelle sous-espace affine engendré par $(e_1, \cdots, e_m)$ et on l'écrit parfois $Aff(e_1, \cdots, e_m)$.

Et on a la réciproque :

Théorème

Tout sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble $<< e_1, \cdots, e_m >>$ des combinaisons linéaires barycentriques d'un système de points.

Et on peut même imposer au système d'être minimal. Pour ça, on introduit la notion d'indépendance affine.

Dépendance et repère affine

Définition

Un système de points de $\mathbb{R}^n$ est dit affinement dépendant si l'un de ces points est dans le sous-espace affine engendré par les autres.

Dans le cas contraire, le système de points est dit affinement indépendant.

Définition

Le système de points $(e_1, \cdots, e_m)$ est un repère affine du sous-espace affine A de $\mathbb{R}^n$ s'il est affinement indépendant et engendre A.

Dans ce cas on a $A = << e_1, \cdots, e_m >>$.

Repères des sous-espaces affines

Théorème

Tout sous-espace affine non-vide de dimension d de $\mathbb{R}^n$ admet un repère affine constitué de $d+1$ points.

Un repère affine d'une droite est constitué de deux points distincts.

Un repère affine d'un plan est constitué de trois points non alignés.

Repère cartésien

Définition

Un repère cartésien d'un sous-espace affine A est constitué d'un point de A et d'une base de la direction de A.

Repère affine et repère cartésien

Un repère affine et un repère cartésien, c'est presque pareil, on passe facilement de l'un à l'autre :

Si $(e_0, \cdots, e_m)$ est un repère affine du sous-espace affine A de $\mathbb{R}^n$, alors

$$(e_0; \overrightarrow{e_0 e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_0 e_m})$$

en est un repère cartésien.

Et ça se dessine.

La construction Sol

On passe au deuxième mode de construction de sous-espaces affines :

Proposition

L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires à n inconnues est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$.

On s'occupera plus loin de la réciproque.

D'un Sol à un Aff

On a dit que tout sous-espace affine admet un repère :

et dans le cas d'un Sol, la méthode de Gauss permet de trouver un tel repère.

Voyons ça de plus près.

- On est dans $\mathbb{R}^n$,
- on a un système $(e_1, \cdots, e_m)$ d'équations linéaires et
- on cherche une base du sous-espace affine des solutions $Sol(e_1, \cdots, e_m)$.

Exemple : le cas résolu

Considérons d'abord un système résolu des deux équations e_1, e_2 à quatre inconnues :

$$\begin{cases} y = 2x + 3t + 4 \\ z = 5x + 7t + 6 \end{cases} .$$

Les solutions s'écrivent

$$(x, 2x+3t+4, 5x+7t+6, t) \quad \text{ou encore} \quad x(1,2,5,0)+t(0,3,7,1)+(0,4,6,$$

Notre ensemble de solutions admet donc le repère cartésien $((0,4,6,0);(1,2,5,0),(0,3,7,1))$.

Exercice

Exo 1

Donnez un repère cartésien du sous-espace affine des solutions du système aux quatre inconnues x, y, z, t

$$\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x + 2y + 3z - t = 5 \end{cases}$$

La réciproque

Maintenant on revient à la réciproque de notre énoncé :

Proposition

L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires à n inconnues est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$.

Voici la réciproque :

Théorème

Tout sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires à n inconnues.

Et concrètement, on fait comment ?

Exemple résolu

Exo résolu

Trouver un système d'équations homogènes pour la droite $<< (0,1,2),(1,1,1) >>$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice

Exo 2

Trouver un système d'équations linéaires pour la droite $<< (1,2,3),(0,1,1) >>$ de $\mathbb{R}^3$.