Sous-espaces vectoriels : le retour

Dédou

Novembre 2011

A la croisée des chemins algébriques

La notion de sous-espace vectoriel

joue un rôle central en algèbre linéaire.

On en refait le tour.

Une définition (ou plusieurs équivalentes ?)

Définition

Dans un espace vectoriel ($\mathbb{R}^n$), un sous-espace vectoriel est une partie qui

- contient 0
- est stable par addition
- est stable par multiplication (externe).

Contre-exemples

Contre-exemples

Dans $\mathbb{R}^n$, certaines parties ne sont pas des sous-espace vectoriels...

- la partie vide ne contient pas 0 (mais elle est stable par addition et multiplication externe).
- dans $\mathbb{R}^2$, le premier quadrant est stable par addition mais pas par multiplication externe.
- dans $\mathbb{R}^2$, la réunion du premier et du troisième quadrant est stable par multiplication externe mais pas par addition.

Et ça se dessine.

Constructions de sous-espaces vectoriels

La notion de sous-espace vectoriel est centrale parce qu'

elle fédère deux constructions apparemment très différentes.

Qu'on va revisiter.

La construction Vect

Proposition

L'ensemble $< e_1, \cdots, e_m >$ des combinaisons linéaires d'un système de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Et la réciproque est vraie !

Théorème

Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble $< e_1, \cdots, e_m >$ des combinaisons linéaires d'un système de vecteurs.

Et on peut même préciser cet énoncé.

Bases et dimension des sous-espaces vectoriels

Théorème

Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble $< e_1, \cdots, e_m >$ des combinaisons linéaires d'un système **libre** de vecteurs.
Autrement dit tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ admet une base.
De plus toutes les bases d'un tel sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ ont le même nombre d'éléments.

Par définition :
ce nombre est la dimension du sous-espace vectoriel en question.

Les droites vectorielles sont de dimension 1
Les plans vectoriels sont de dimension 2.

La construction Ker

On passe au deuxième mode de construction de sous-espaces vectoriels :

Proposition

L'ensemble des solutions d'un système d'équations homogènes à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

On s'occupera plus loin de la réciproque.

Dimension d'un Ker

Pour un Ker, on a la "formule des dimensions" :

Proposition

La dimension d de l'ensemble des solutions d'un système d'équations homogènes à n inconnues est $n - r$ où r est le rang du système d'équations.

$$d = n - r.$$

On s'occupera plus loin de la réciproque.

D'un Ker à un Vect

On a dit que tout sous-espace vectoriel admet une base :

et dans le cas d'un Ker, la méthode de Gauss permet de trouver une telle base.

Voyons ça de plus près.

- On est dans $\mathbb{R}^n$,
- on a un système $(e_1, \cdots, e_m)$ d'équations linéaires homogènes et
- on cherche une base du sous-espace vectoriel des solutions $Ker(e_1, \cdots, e_m)$.

Exemple : le cas résolu

Considérons d'abord un système résolu des deux équations e_1, e_2 à quatre inconnues :

$$\begin{cases} y = 2x + 3t \\ z = 5x + 7t \end{cases}.$$

Les solutions s'écrivent

$$(x, 2x + 3t, 5x + 7t, t) \quad \text{ou encore} \quad x(1, 2, 5, 0) + t(0, 3, 7, 1).$$

Ce sont les combinaisons linéaires de $(1, 2, 5, 0)$ et $(0, 3, 7, 1)$.

Exercice

Exo 1

Donnez une base du sous-espace vectoriel des solutions du système aux quatre inconnues x, y, z, t

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + 3z - t = 0 \end{cases}$$

La réciproque

Maintenant on revient à la réciproque de notre énoncé :

Proposition

L'ensemble $< e_1, \cdots, e_m >$ des combinaisons linéaires d'un système de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Voici la réciproque :

Théorème

Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des solutions d'un système d'équations homogènes à n inconnues.

Et concrètement, on fait comment ?

Exemple résolu

Exo résolu

Trouver un système d'équations homogènes pour le plan $< (0,1,2,3),(1,1,1,1) >$ de $\mathbb{R}^4$.

Exercice

Exo 2

Trouver un système d'équations homogènes pour le plan $< (1,2,3,4),(0,1,1,1) >$ de $\mathbb{R}^4$.