Sous-espace engendré

Dédou

Octobre 2011

La droite engendrée par un vecteur

Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$

L'ensemble des multiples de v constitue une droite, la droite engendrée par v.

Exemple

Le point $(2, 4, -2)$ est sur la droite engendrée par le vecteur $(1, 2, -1)$.

Exo corrigé

Choisissez un vecteur de $\mathbb{R}^4$, et indiquez deux points de la droite engendrée par ce vecteur.

Le plan engendré par deux vecteurs

Soit v et w deux vecteurs non proportionnels de $\mathbb{R}^n$

L'ensemble des combinaisons linéaires de v et w constitue un plan, le plan engendré par v et w.

Exemple

Le point $(2, 4, -3)$ est dans le plan engendré par les vecteurs $(1, 2, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

Exo corrigé

Choisissez deux vecteurs non proportionnels de $\mathbb{R}^4$, et indiquez deux points du plan engendré par ces deux vecteurs.

La construction Vect

Définition

Etant donné un système $(e_1, \cdots, e_m)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$ ou encore $< e_1, \cdots, e_m >$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $(e_1, \cdots, e_m)$:

$$\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m) := \{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m | \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}.$$

On dit aussi que $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$ est le sous-espace vectoriel engendré par $(e_1, \cdots, e_m)$ et que les vecteurs $(e_1, \cdots, e_m)$ sont des générateurs de $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$ ou engendrent $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$.

Attention

Les vecteurs $(e_1, \cdots, e_m)$ sont des générateurs de $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$ pas les générateurs de $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$.

Sous-espace vectoriel

Définition

Une partie de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel si elle est de la forme $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$, autrement dit $< e_1, \cdots, e_m >$, où $(e_1, \cdots, e_m)$ est un système de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Attention bis

Les vecteurs $(e_1, \cdots, e_m)$ sont des générateurs de $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$ pas les générateurs de $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_m)$.

Multiplicité des générateurs : exemple

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $(1,1,0)$ et $(1,-2,0)$ engendrent le plan d'équation $z=0$, qui est aussi engendré par les deux vecteurs $(2,2,0)$ et $(1,0,0)$:

$$< (1,1,0),(1,-2,0) > \; = \; < (2,2,0),(1,0,0) > .$$

Exo corrigé

Donnez un autre plan de $\mathbb{R}^3$ et deux systèmes de générateurs de votre plan.

Exemples de Vect

- Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Vect}((1,1))$ est la diagonale, et ça se dessine.
- Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Vect}((1,1),(1,-1))$ est $\mathbb{R}^2$ tout entier, et ça se dessine.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{Vect}((1,1,0))$ est une droite, et ça se dessine.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{Vect}((1,0,1),(1,0,0))$ est le plan d'équation $y=0$ et ça se dessine.

Exo corrigé

Identifiez le sous-espace $<(0,1,1),(0,0-3)>$ de $\mathbb{R}^3$.

Génération

Définition

On dit que le système $(e_1, \cdots, e_m)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est générateur si $< e_1, \cdots, e_m >$ est égal à $\mathbb{R}^n$ tout entier.

Exemple

Le système de trois vecteurs $((1,2),(2,4),(3,4))$ de $\mathbb{R}^2$ est générateur.

Exo corrigé

Donnez un système générateur de quatre vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.

Hérédité de la génération

Proposition

Tout système dont un sous-système est générateur est lui aussi générateur.

Exemple

Tout vecteur du plan (x, y) est combinaison linéaire de $(1, 0)$ et $(0, 1)$: $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$. A fortiori, tout vecteur du plan est combinaison linéaire de $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$:
$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) + 0(1, 1)$.

Preuve

Si tout vecteur de notre espace vectoriel est combinaison linéaire des vecteurs du petit système, il l'est a fortiori des vecteurs du grand système : il suffit pour le voir d'affecter les vecteurs superflus du coefficient 0.

Rang et génération

Théorème

Pour qu'un système de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ soit générateur, il faut et il suffit que son rang soit n.

Exemple

Le système facile $((1,2,3),(0,1,1),(0,2,4))$ est de rang 3 dans $\mathbb{R}^3$ donc générateur.

Exo corrigé

Le système facile $((1,2,3),(1,1,1),(0,2,4))$ est-il générateur ?

Sous-espaces vectoriels et systèmes homogènes

Théorème

L'ensemble des solutions d'un système d'équations homogènes à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Et ça se prouve !

Sous-espaces vectoriels et systèmes homogènes

Et en plus la réciproque est vraie !

Théorème

Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des solutions d'un système d'équations homogènes à n inconnues.

Exemple

Exo corrigé

Trouver un système de générateurs du sous-espace des solutions du système :

$$\begin{cases} x = y + u + v \\ z = y - u - v \end{cases}$$