Systèmes trois-deux

Dédou

Octobre 2011

Mon premier système à trois équations

Résoudre le système aux deux inconnues x et y :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \\ 2x - y = -1. \end{cases}$$

c'est calculer l'intersection de trois droites du plan.

Exo résolu

a) Dessinez les trois droites correspondantes sur un même croquis.
b) Le système est-il compatible, autrement dit a-t-il une solution ?

Comment faire un système compatible ?

Si on prend trois droites "au hasard", elle n'auront pas de point commun. Comment faire pour qu'elles en ait un ? Y'a une grosse ficelle :
Je prends deux fois la même équation, ou, à peine plus subtil, je prends deux équations proportionnelles (et la troisième quelconque).

Exo résolu

Utilisez cette grosse ficelle pour fabriquer un système compatible de trois équations à deux inconnues.

Une solution plus subtile

Je prends mes deux premières équations E_1 et E_2 "au hasard", par exemple $x + y = 1$ et $x - y = 1$ mais pour E_3 je prends une combinaison linéaire de E_1 et E_2 par exemple $3E_1 - 2E_2$. J'obtiens le système

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \\ x + 5y = 1. \end{cases}$$

qui est compatible.

Le premier principe fondamental des systèmes d'équations

Le premier principe fondamental des systèmes d'équations s'énonce comme suit :

On ne change pas les solutions d'un système en lui ajoutant une équation qui est combinaison linéaire des autres.

Evidemment, on peut le formuler à l'envers :

On ne change pas les solutions d'un système en lui retirant une équation qui est combinaison linéaire des autres.

Et même ça se démontre !

La preuve du premier principe fondamental I

On traîte notre cas particulier de deux équations à deux inconnues et de la combinaison linéaire $E_3 := 3E_1 - 2E_2$, le cas général est pareil.
On a le système S

$$\begin{cases} A_1(x,y) = A_2(x,y) \\ B_1(x,y) = B_2(x,y) \end{cases}$$

et le système S'

$$\begin{cases} A_1(x,y) = A_2(x,y) \\ B_1(x,y) = B_2(x,y) \\ 3A_1(x,y) - 2B_1(x,y) = 3A_2(x,y) - 2B_2(x,y) \end{cases},$$

et on doit montrer

$$S \Leftrightarrow S'.$$

La preuve du premier principe fondamental II

Dans un sens,

$$\left\{\begin{array}{c} A_1(x,y) = A_2(x,y) \\ B_1(x,y) = B_2(x,y) \\ 3A_1(x,y) - 2B_1(x,y) = 3A_2(x,y) - 2B_2(x,y) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} A_1(x,y) = A_2(x,y) \\ B_1(x,y) = B_2(x,y) \end{array}\right.$$

on a trois hypothèses et deux conclusions qui sont des hypothèses, trop facile.

La preuve du premier principe fondamental III

Dans l'autre sens,

$$\left\{\begin{array}{l} A_1(x,y) = A_2(x,y) \\ B_1(x,y) = B_2(x,y) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} A_1(x,y) = A_2(x,y) \\ B_1(x,y) = B_2(x,y) \\ 3A_1(x,y) - 2B_1(x,y) = 3A_2(x,y) - 2B_2(x,y) \end{array}\right.$$

on a deux hypothèses et trois conclusions dont deux sont des hypothèses. Reste la troisième.

La preuve du premier principe fondamental IV

$$\begin{cases} A_1(x,y) = A_2(x,y) \\ B_1(x,y) = B_2(x,y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$3A_1(x,y) - 2B_1(x,y) = 3A_2(x,y) - 2B_2(x,y).$$

Ca se voit bien
(en remplaçant $A_1(x,y)$ par $A_2(x,y)$ et $B_1(x,y)$ par $B_2(x,y)$).

La réciproque

On a donc trouvé une condition suffisante pour qu'un système de trois équations linéaires à deux inconnues, dont les deux premières ont une solution commune, ait une solution, c'est que la troisième équation soit combinaison linéaire des deux autres.
Et il y a une réciproque :

Théorème

Si un système de trois équations linéaires à deux inconnues a une solution, alors l'une de ces trois équations est combinaison linéaire des deux autres.

Quelle est l'équation superflue ?

Donc si notre système de trois équations linéaires à deux inconnues a une solution, l'une de ces trois équations est combinaison linéaire des autres, ok mais laquelle ?
Supposons par exemple que ce soit la seconde, E_2. On a donc $E_2 = aE_1 + bE_3$.

- si a (resp. b) est nul, E_2 et E_3 (resp. et E_1) sont proportionnelles.
- si au contraire a et b sont non-nuls, alors on a $E_1 = \frac{1}{a}E_2 - \frac{b}{a}E_3$ et $E_3 = \frac{1}{b}E_2 - \frac{a}{b}E_1$.

Conclusion

Si un système de trois équations linéaires à deux inconnues a une solution, soit deux de ces équations sont proportionnelles ; soit chacune de ces trois équations est combinaison linéaire des deux autres.

Exercice résolu

Exo résolu

Le système

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

admet la solution $(2, 1)$. Ecrire la première équation comme combinaison linéaire des deux autres.

Exercice

Exo 1

Le système

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

admet une solution. Ecrire la troisième équation comme combinaison linéaire des deux autres.