Applications linéaires

Dédou

Décembre 2012

Systèmes linéaires comme équations aux antécédents

On va s'habituer à interpréter par exemple le système

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 4 \\ 3x - 5y = 0 \end{array} \right.$$

comme équation aux antécédents par
$f := (x, y) \mapsto (2x + 3y, 3x - 5y)$.
Cet f est un exemple d'application **linéaire**.

Définition des fonctions linéaires

Une fonction linéaire sur $\mathbb{R}^3$ est une fonction de la forme $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$. Plus généralement :

Définition

Une fonction linéaire sur $\mathbb{R}^q$ est une application de la forme

$$(x_1, \cdots, x_q) \mapsto a_1 x_1 + \cdots + a_q x_q.$$

Exemple

$(x, y, z, t) \mapsto 2y - \pi t$ est une fonction linéaire sur $\mathbb{R}^4$.

Définition concrète des applications linéaires

Définition

Une application linéaire de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$ est une application de la forme

$$v \mapsto (f_1(v), \cdots, f_p(v))$$

où $f_1, \cdots, f_p$ sont des fonctions linéaires sur $\mathbb{R}^q$.

Exemple

$(x, y, z, t) \mapsto (2y - \pi t, x - z, y + t)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.

Définition abstraite des applications linéaires

Proposition

Une application f de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$ est linéaire ssi elle est **compatible à la structure vectorielle** $(0, +, .)$ au sens suivant

- **compatibilité aux neutres** : $f(0) = 0$;
- **compatibilité aux additions** : pour v et w quelconques dans $\mathbb{R}^q$, on a $f(v + w) = f(v) + f(w)$;
- **compatibilité aux multiplications, ou homogénéité** : pour λ réel quelconque et v vecteur quelconque dans $\mathbb{R}^q$, on a $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Et ça se démontre...

Définition diabolique des applications linéaires

Proposition

Une application $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ est linéaire ssi elle vérifie la condition suivante :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathbb{R}^q, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Cette condition regroupe en une seule les trois conditions de la définition diabolique.
Et ça se démontre...