Bases

Dédou

Novembre 2012

Base d'un sous-espace vectoriel

Définition

Une base d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, c'est un système générateur libre de ce sous-espace vectoriel .

Comme sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on a $\mathbb{R}^n$ tout entier, donc

Définition

Une base de $\mathbb{R}^n$, c'est un système libre qui engendre $\mathbb{R}^n$.

Rappels

- Par exemple "(e_1, e_2, e_3) engendre V" implique que :
  tout vecteur de V est combinaison linéaire de (e_1, e_2, e_3).
- Par exemple "(e_1, e_2, e_3) est libre" signifie que :
  aucun de ces vecteurs n'est combinaison linéaire des autres.

Bases de $\mathbb{R}^2$: exemples

Exemples

Comme base de $\mathbb{R}^2$, on a la base canonique $((1,0),(0,1))$ mais y en a plein d'autres, comme $((2,3),(4,5))$.

Ca s'écrit aussi en colonnes et ça se dessine.

Toutes les bases de $\mathbb{R}^2$

Proposition

a) Tout système de deux vecteurs non proportionnels de $\mathbb{R}^2$ en est une base.
b) Inversement toute base de $\mathbb{R}^2$ est constituée de deux vecteurs (non proportionnels).

Et ça se démontre. Mais nous, on a pas le temps.

Bases de $\mathbb{R}^3$

Proposition

a) Tout système libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ en est une base.
b) Inversement toute base de $\mathbb{R}^3$ est constituée de trois vecteurs formant un système de rang trois.

Et ça se démontre. Mais nous, on a pas le temps.

Bases triangulaires supérieures de $\mathbb{R}^3$

Le système

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

est une base de $\mathbb{R}^3$, puisque son rang est 3.

Bases triangulaires inférieures de $\mathbb{R}^3$

Le système

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

est une base de $\mathbb{R}^3$, sa matrice est triangulaire (inférieure).

Bases faciles de $\mathbb{R}^3$ I

Le système

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

est une base de $\mathbb{R}^3$, car son rang est trois (facile).

Bases faciles de $\mathbb{R}^3$ II

Le système

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

est une base de $\mathbb{R}^3$, car son rang est trois (facile).

Bases de $\mathbb{R}^n$

Proposition

a) Tout système libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ en est une base.
b) Inversement toute base de $\mathbb{R}^n$ est constituée de n vecteurs formant un système libre.

Et ça se démontre. Mais nous, on n'a pas le temps.

Bases canoniques

Proposition

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ en est bien une base.

Et ça se démontre. Mais nous, on n'a pas le temps.

Dégraisser en base : le problème

Problème

- On a un système de vecteurs d'un espace vectoriel,
- il engendre un sous-espace vectoriel E, et
- on veut extraire de ce système une base de E.

Réponse

C'est toujours possible :
on élimine l'un après l'autre ceux des vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres.
Quand on a fini, le système obtenu est encore générateur de E, et en plus il est libre, donc c'est une base de E.

Dégraisser en base : la méthode bourrin

La méthode bourrin

- Je pars des deux premiers vecteurs (si non proportionnels)
- je teste si le vecteur suivant est cb des précédents, si oui je le jette sinon je le prends
- et je recommence jusqu'à épuisement des vecteurs.

Critique

Si j'ai six vecteurs, cette méthode fait quatre fois Gauss.

On va voir qu'il suffit de faire une fois Gauss.

Dégraisser en base : exemple

Exemple

Extraire une base du système des lignes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Dégraisser en base : exo

Exo 1

Extraire une base du système des lignes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Engraisser en base : le problème

Problème : on a un système libre S d'un sous-espace vectoriel E, et

on veut compléter S en une base de E.

Réponse : c'est toujours possible :

on ajoute à S, un par un,
des vecteurs de E qui font augmenter le rang du système.
Quand le nombre de vecteurs atteint la dimension de E,
le système obtenu est toujours libre,
et en plus il est générateur, donc c'est une base de E.

Problème : où chercher ces vecteurs qu'on ajoute ?

Réponse : il suffit de puiser dans une base de E.

Comment engraisser un système libre

On le dit autrement :
Quand on a un système libre d'un sous-espace vectoriel E,
pour trouver des vecteurs de E qui augmentent le rang du système,
il suffit de les prendre dans une base de E.
Par exemple, si e_1 et e_2 sont deux vecteurs non proportionnels d'un sous-espace vectoriel E qui admet (b_1, b_2, b_3) comme base, alors l'un des trois systèmes

$$(e_1, e_2, b_1) \quad \text{ou} \quad (e_1, e_2, b_2) \quad \text{ou} \quad (e_1, e_2, b_3)$$

est une base de E.

Bases engraissées : exemple

Exo corrigé

Complètez $((1,1,1),(0,1,1))$ de deux façons en une base de $\mathbb{R}^3$.

Bases engraissées : conclusion

On le dit autrement :
Quand on a un système libre d'un sous-espace vectoriel E,
pour le compléter en une base de E, c'est facile :
on lui ajoute l'un après l'autre les vecteurs d'une base de E, en ne gardant que ceux qui font augmenter le rang.

Le théorème de la base incomplète

On le dit encore autrement :

Théorème

Tout système libre peut être complété en une base par ajout de vecteurs choisis dans une base donnée.

Exo final

Exo final

Complètez $((2,0,1),(3,3,2))$ de deux façons en une base de $\mathbb{R}^3$.