

Dimension des sous-espaces

Dédou

Novembre 2012

Dimension des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n

Définition

La dimension d'un sous-espace de \mathbb{R}^n , c'est le nombre minimal de vecteurs dans un système de générateurs de ce sous-espace.

Définition

On dit "droite" pour "sous-espace de dimension 1" et "plan" pour "sous-espace de dimension 2".

Exemples

- Dans \mathbb{R}^2 , la diagonale $\text{Vect}((1, 1))$ est de dimension 1.
- Dans \mathbb{R}^3 , $\text{Vect}((1, 1, 0), (1, -1, 1))$ est de dimension 2.
- Dans \mathbb{R}^3 , $\langle (1, 1, 0), (1, -1, 2), (1, 0, 1) \rangle$ est de dimension 2.

Sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3

Comme sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , on a

- en dimension 0 :
 $\{0\}$, qui est l'ensemble des solutions de $x = y = z = 0$;
- en dimension 1 :
les droites passant par 0, qui ont toutes un système de deux équations homogènes ;
- en dimension 2 :
les plans passant par 0, qui ont tous une équation homogène ;
- en dimension 3 :
 \mathbb{R}^3 tout entier qui est l'ensemble des solutions de $0 = 0$.

Fausse dimension des sous-espaces vectoriels engendrés

L'idée

La dimension du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$ engendré par (e_1, \dots, e_m) devrait être le nombre de générateurs m
Mais c'est faux ! il ne faut pas compter naïvement les générateurs.

Exo corrigé

Donnez un exemple de système de trois vecteurs de \mathbb{R}^4 qui n'engendrent qu'un plan.

Dimension des sous-espaces vectoriels engendrés

Théorème

La dimension du sous-espace vectoriel engendré par un système de vecteurs est le rang de ce système.

Exo corrigé

Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par un système de cinq vecteurs de rang 3 dans \mathbb{R}^7 ?

La dimension d'un noyau

L'idée

La dimension du sous-espace vectoriel des solutions d'un système de deux équations homogènes à six inconnues, c'est le nombre d'inconnues secondaires, ça devrait être 4.

$$\text{Dimension (du sev des solutions)} = (\text{PRESQUE}) \\ \text{nombre d'inconnues} - \text{nombre d'équations.}$$

Mais attention ! il ne faut pas compter naïvement les équations.

Exo corrigé

Donnez un exemple de système de trois équations homogènes à quatre inconnues dont l'ensemble des solutions est un plan.

Dimension des noyaux

La bonne formule

La dimension du sous-espace vectoriel des solutions d'un système d'équations homogènes est donnée par la formule :

$$\text{Dimension (du sev des solutions)} = \text{nombre d'inconnues} - \text{rang du système d'équations.}$$

Exo corrigé

Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel des solutions du système ?

$$\begin{cases} x = y + u + v \\ z = y - u - v \end{cases}$$

Exo final

Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel des solutions du système (à 4 inconnues) ?

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + t = 0 \\ x + 4y + 7z + t = 0 \end{cases}$$