

Plans de l'espace

Dédou

Octobre 2012

L'espace (numérique) de dimension 3

On a beaucoup travaillé dans \mathbb{R}^2

Les points de \mathbb{R}^2 sont les couples de deux nombres.

On va maintenant travailler dans \mathbb{R}^3

Les points de \mathbb{R}^3 sont les triplets formés de trois nombres.

Exemples

$(6, 7, 8)$ est un point de \mathbb{R}^3 et $(8, 7, 6)$ en est un autre.

Un plan de l'espace, c'est quoi ? I

Un plan de l'espace est une partie de cet espace, mais pas n'importe laquelle : comme autres parties, il y a par exemple les sphères, les droites, les demi-espaces.

Exo oral

Quel genre de partie de \mathbb{R}^3 est $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 5\}$?

Un plan, c'est quoi ? II

Comme plans de \mathbb{R}^3 , on connaît un peu les graphes des fonctions affines.

Exemple

Le graphe de

$$(x, y) \mapsto 2x + 3y - 6$$

est le plan d'équation

$$z = 2x + 3y - 6.$$

Et ça se dessine.

Attention

On parle ici de fonction de deux variables.

Fonctions et graphes : écriture

Rappel

On écrit les fonctions avec \mapsto et les graphes avec $\{\dots | \dots\}$.

Exemples

$$(x, y) \mapsto 2x + 3y - 6$$

est une fonction. Et

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 2x + 3y - 6\}$$

est son graphe.

Equation des graphes : exemple

On sait donc donner une équation pour le graphe d'une fonction de deux variables.

Exemple

Le graphe de la fonction

$$(x, y) \mapsto 3x - 2y + 5$$

est le plan d'équation

$$z = 3x - 2y + 5.$$

Equation des graphes : exo

Exo 1

Donner une équation du graphe de $(x, y) \mapsto -2x + 3y - 1$.

Reconnaître un graphe

Inversement, étant donné un plan par une équation, on peut y reconnaître le graphe d'une fonction.

Exemple

Le plan d'équation

$$2x + 3y + 4z = 5$$

est le graphe de la fonction

$$(x, y) \mapsto -\frac{x}{2} - \frac{3y}{4} + \frac{5}{4}.$$

Reconnaître un graphe

Exo 2

Donner une fonction dont le plan d'équation

$$5x - 2y - 4z = 8$$

est le graphe.

Un plan, c'est quoi ? III

Tous les plans de \mathbb{R}^3 ne sont pas des graphes,
il y a en plus les plans verticaux,

Exemple

Dans \mathbb{R}^3 le plan d'équation $x + 2y = 3$ est vertical.

Un plan, c'est quoi? IV

Au total, un plan (de \mathbb{R}^3), c'est une partie (de \mathbb{R}^3) de la forme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz + d = 0\}$$

avec a, b, c, d réels et **a ou b ou c non nul**.

On dit que ce plan est le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Attention

Dans \mathbb{R}^3 ce sont les plans et non plus les droites qui sont définis par une équation linéaire.

Unicité de l'équation I

L'équation d'un plan n'est pas unique, même si on impose la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Exemple

Le plan d'équation $x + 2y + 3z + 4 = 0$ a aussi pour équation $2x + 4y + 6z + 8 = 0$.

Unicité de l'équation II

L'équation d'un plan devient unique, si on impose la forme
 $z = ax + by + c$.

Mais cette forme ne convient pas à tous les plans : plus précisément les plans verticaux n'ont pas d'équation de cette forme.