Equations aux antécédents

Dédou

Novembre 2012

Equations résolues

Il y a toutes sortes d'équations. Les équations préférées des boulets sont les équations résolues, celles de la forme

$$x = a$$

où x est l'inconnue et a est la formule qui "donne" la solution du problème.
Les équations résolues sont rares et ne rapportent pas gros.

Equations aux antécédents

Juste derrière les équations résolues, on aime bien les équations aux antécédents. Ce sont celles qui sont de la forme

$$f(x) = a$$

où x est l'inconnue, tandis que f et a sont donnés. La particularité des équations aux antécédents est donc que leur second membre est une (fonction) constante.

Le cas tout réel

Le cas qu'on maîtrise le mieux, c'est celui où l'inconnue et l'équation sont de type réel, et f va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ca se dessine grave.

Exemple

Si on prend

$$f := x \mapsto x^2 - 5 \quad \text{et} \quad a := \cos \pi$$

on obtient l'équation

$$x^2 - 5 = \cos \pi.$$

Exo corrigé

Résoudre l'équation précédente.

Equations générales

Une équation générale peut toujours se ramener à (ça veut dire "est équivalente à", "a les mêmes solutions que") une équation aux antécédents.

Exemple

L'équation du nombre d'or

$$x^2 = x + 1$$

est équivalente à

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad \text{à} \quad x^2 - x = 1.$$

Le cas des points

On peut parler d'équation aux antécédents même lorsque l'inconnue est de type vectoriel.

Exemple

On considère

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & M & \mapsto & AM^2 \end{array}$$

où A est un point donné.
L'ensemble des solutions de

$$f(M) = 3$$

est un cercle. C'est l'ensemble des antécédents de 3 par f.

Le cas des couples : exemple

Au lieu de chercher un point M, on peut chercher son couple de coordonnées x et y.

Exemple

L'ensemble des solutions de

$$2x + 3y^2 = 3$$

est une parabole. C'est l'ensemble des antécédents de 3 par la fonction

$$(x, y) \mapsto 2x + 3y^2.$$

Le cas des couples : exo

Exo 1

Identifiez $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^3 = 2\}$ comme ensemble d'antécédents d'un nombre a par une fonction f.

Equation aux antécédents de type vectoriel

On peut parler d'équation aux antécédents même pour les équations de type vectoriel.

Exemple

Etant donnés trois points A, B, C de $\mathbb{R}^2$ et trois nombres a, b, c l'équation aux barycentres de A, B, C pondérés par a, b, c est l'équation suivante à l'inconnue G de type $\mathbb{R}^2$:

$$a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} = 0.$$

Ses solutions sont les antécédents de 0 par l'application

$$f : G \mapsto a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC}.$$

Les systèmes linéaires comme équations aux antécédents : exemple

Le système

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 5x + 7y - 2z = 2 \end{cases}$$

s'interprète comme équation aux antécédents de $a := (1, 2)$ par $f := (x, y, z) \mapsto (2x + 3y + 4z, 5x + 7y - 2z)$.

Les systèmes linéaires comme équations aux antécédents : exo

Exo final

Interpréter le système de trois équations à deux inconnues

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 7y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

comme équation aux antécédents.

PS : Linéaire ou affine ?

On préfère interpréter notre système linéaire comme équation aux antécédents
de $a := (1, 2)$ par $f := (x, y, z) \mapsto (2x + 3y + 4z, 5x + 7y - 2z)$
que comme équation aux antécédents
de $a := 0$ par $f := (x, y, z) \mapsto (2x + 3y + 4z - 1, 5x + 7y - 2z - 2)$.

On préfère de beaucoup que f soit plus simple, même si a est (un peu) plus compliqué.