

Méthode du pivot de Gauss

Dédou

Octobre 2012

La méthode du pivot

La méthode du pivot

permet d'associer à tout système linéaire un système facile équivalent.

Elle consiste à sélectionner une équation qu'on va garder intacte, et dans laquelle on va rendre une inconnue facile (en l'éliminant des autres équations). Dans cette démarche, ce qu'on appelle le pivot, c'est la paire (équation, inconnue) choisie.

Mon premier pivot I

Pour résoudre le système
$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 2z + 2t = 5 \\ x + 2y + 3z + 3t = 5 \\ x + 2y + 3z + 4t = 9 \end{cases}$$

on décide de rendre facile l'inconnue x dans le première équation. Pour cela, on "tue" x dans les deux autres en faisant $E_2 := E_2 - E_1$, puis $E_3 := E_3 - E_1$ et enfin $E_4 := E_4 - E_1$. On obtient le système facile équivalent :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ y + z + t = 2 \\ y + 2z + 2t = 4 \\ y + 2z + 3t = 8. \end{cases}$$

Mon premier pivot II

Pour résoudre le système facile

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 1 \\ y + z + t = 2 \\ y + 2z + 2t = 4 \\ y + 2z + 3t = 8 \end{array} \right.$$

on résout le système "dérivé" :

$$\left\{ \begin{array}{l} y + z + t = 2 \\ y + 2z + 2t = 4 \\ y + 2z + 3t = 8. \end{array} \right.$$

On trouve les valeurs de y, z et t qu'on reporte dans la première équation pour calculer x .

Dans cet exemple les quatre inconnues sont principales.

Exercice corrigé

S'il y a plus d'inconnues que d'équations, c'est presque pareil, mais il y a des inconnues secondaires.

Exo corrigé

$$\text{Résoudre le système } \begin{cases} x + 2y + z + t + u = 2 \\ x + 3y + 2z + 2t + 5u = 3 \\ x + 3y + 3z + 3t + 3u = 4 \\ x + 4y + 3z + 4t + 5u = 4, \end{cases}$$

Exo 1

Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z + t + u = 2 \\ x + 2y + 2z + 2t + 2u = 3 \\ x + 2y + 3z + 3t + 3u = 4 \\ x + 2y + 3z + 4t + 5u = 4, \end{cases}$$

Le choix par défaut du pivot

Pour appliquer la méthode du pivot à un système, on commence donc par y choisir une équation et une inconnue qu'on va rendre faciles en modifiant les autres équations. Le choix de la première équation et de la première inconnue est le choix par défaut .

$$\text{Pour le système } \begin{cases} 3y + t = 1 \\ 2x + 5z - t = 2 \\ y - z - t = 0, \end{cases}$$

le choix par défaut ne convient pas puisque x n'apparaît pas dans la première équation.

Le premier cas sympa

Le premier cas sympa,

c'est quand le coefficient de l'inconnue facile est 1 (ou -1).

Pour résoudre le système suivant, on choisit le pivot par défaut :

$$\begin{cases} x + 3y + t = 1 \\ 4x + 5z - t = 2 \\ 5x + y - z - t = 0. \end{cases}$$

Ensuite on ajoute aux équations non choisies le multiple qu'il faut de l'équation choisie pour "tuer" l'inconnue choisie. Ici, on fait

$$E_2 := E_2 - 4E_1 \quad \text{et} \quad E_3 := E_3 - 5E_1,$$

ce qui nous donne le système facile équivalent

$$\begin{cases} x + 3y + t = 1 \\ -12y + 5z - 5t = -2 \\ -14y - z - 6t = -5. \end{cases}$$

Le second cas sympa

Le second cas sympa, c'est quand la future inconnue facile est déjà absente de certaines équations :

$$\begin{cases} 3x + 3y + 2t + 5u = 1 \\ 4x + 5z - 3t - 3u = 2 \\ 5x + 2y - 3z - 8t + 2u = 0 \end{cases}$$

Si on fait encore le choix par défaut du pivot, il faudra faire par exemple les deux transformations $E_2 := 3E_2 - 4E_1$ et $E_3 := 3E_3 - 5E_1$ pour rendre le système facile.

Tandis que si on prend y comme inconnue facile, il suffit de faire $E_3 := 3E_3 - 2E_1$.

Pour résoudre le système suivant, on choisit plutôt de rendre z facile dans la deuxième équation, à cause du coefficient -1 :

$$\begin{cases} 3x + 3y + 2z + 5t = 1 \\ 4x + 5y - z - 4t = 2 \\ 5x + 2y - 2z - 3t = 0. \end{cases}$$

On fait les transformations “élémentaires” $E_1 := E_1 + 2E_2$ et $E_3 := E_3 - 2E_2$, qui rendent le système facile.

Choix intelligent II

Pour résoudre le système suivant, on choisit plutôt de rendre y facile dans la deuxième équation, ce qui économise une transformation élémentaire :

$$\begin{cases} 3x + 3y + 2z + 4t = 1 \\ 4x + y - z + 5t = 2 \\ 5x - 2z - 3t = 0. \end{cases}$$

On fait la transformation "élémentaires" $E_1 := E_1 - 3E_2$ qui rend le système facile.

Exo 3

Résoudre le système de cette façon.

La méthode du pivot pour résoudre

Pour résoudre un système, on applique une première fois la méthode au système donné, puis a une deuxième fois au système dérivé du système facile obtenu, et ainsi de suite,

jusqu'à obtenir une équation impossible ou un système à une ou deux équations, qu'on sait résoudre.