Rang des systèmes linéaires

Dédou

Octobre 2012

Le choix des inconnues principales I

La question qui s'impose est

Comment peut-on choisir les inconnues principales ?

Pour le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \end{array}\right.$$

on peut prendre x et y comme inconnues principales, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=3-z \\ x-y=1-z \end{array}\right.$$

“Quand on fixe z, on obtient deux droites sécantes (en x et y)“.

Le choix des inconnues principales II

Pour le même système :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

on ne peut pas prendre x et z comme inconnues principales, car on obtient le système :

$$\begin{cases} x + z = 3 - y \\ x + z = 1 + y \end{cases}$$

"Quand on fixe y, on obtient deux droites parallèles (en x et z)".

Le choix des inconnues principales III

Exo 1

De combien de façons peut-on choisir les inconnues principales pour le système suivant ?

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

Le nombre des inconnues principales

En général on a pas mal de choix pour les inconnues principales, mais il y a une contrainte incontournable :

Théorème

Toutes les résolutions d'un système linéaire (compatible) ont le même nombre d'inconnues principales.

Pour une résolution, le nombre d'inconnues principales c'est aussi le nombre d'équations.

Pour la démonstration, on verra plus tard.

Le rang d'un système homogène I

Les systèmes homogènes (ceux qui n'ont pas de constante, autrement dit ceux dont 0 est solution) sont évidemment compatibles.
On appelle **rang** d'un système homogène le nombre d'équations (ou d'inconnues principales) de ses résolutions.

L'idée est que le rang d'un système homogène est le nombre d'équations "qui comptent" dans ce système, celles qui restent quand on enlève (une par une) les équations qui sont combinaisons linéaires des autres.

Le rang d'un système homogène II

Exemple

Le rang du système

$$\left\{\begin{aligned} 10x + 20y + 3z + 4t &= 0 \\ 4x + 5y + 60z + 3t &= 0 \\ 14x + 25y + 63z + 7t &= 0 \end{aligned}\right.$$

est 2 : on peut oublier la dernière équation, qui est somme des deux premières, et prendre z et t comme inconnues secondaires.

Exo 2

Quel est le rang du système suivant ?

$$\left\{\begin{aligned} 10x + 20y + 3z + 2t &= 0 \\ 4x + 60z + 3t &= 0 \\ 14x + 63z + 5t &= 0 \end{aligned}\right.$$

Système homogène associé

Un système inhomogène peut être incompatible, mais pas son système homogène associé, obtenu en "mettant les constantes à zéro".

Exemple

A gauche un système inhomogène, à droite son système homogène associé :

$$\left\{\begin{aligned} 2x+3y+4z+2v&=1\\ 7y-2z-4t-u&=2\\ 3x-t-u-v&=-4\\ x-y-z+t-v&=3 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &2x+3y+4z+2v=0\\ &7y-2z-4t-u=0\\ &3x-t-u-v=0\\ &x-y-z+t-v=0 \end{aligned}\right. .$$

Le rang d'un système général

Par définition :

Le rang d'un système linéaire est le rang de son système homogène associé.

Ce rang est surtout utile dans le cas compatible, où c'est encore le nombre d'équations "qui comptent".

Exo 3

Quel est le rang du système suivant ?

$$\left\{ \begin{aligned} x + 20y + 3z &= 3 \\ y + 60z &= 2 \\ y + 63z &= 1 \end{aligned} \right.$$

L'invariance du rang

Le rang d'un système linéaire ne change pas quand

- on lui ajoute (ou on lui retire) une équation qui est combinaison linéaire des autres
- on multiplie une de ses équations par un nombre non nul
- on ajoute à une de ses équations un multiple d'une autre.

Normal, puisqu'on sait que ces trois opérations "élémentaires" ne changent pas les solutions du système.

Rang et nombre d'inconnues

Proposition

Le rang d'un système linéaire est au plus égal au nombre d'inconnues.

Normal, puisque c'est le nombre d'inconnues principales.

Exo 5

Ecrivez un système de rang deux à quatre inconnues.

Rang et nombre d'équations

Proposition

Le rang d'un système linéaire est au plus égal au nombre d'équations.

Ca, c'est un peu moins évident, on s'en convaincra plus tard.