Rang des systèmes de vecteurs

Dédou

Octobre 2012

Rang d'un système de vecteurs lignes

On peut voir la matrice

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

comme un système de deux vecteurs lignes :

$$((8,3,5),(2,4,7)) .$$

Par définition

Le rang d'un système de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, c'est le rang de la matrice correspondante.

Exercice

Exo

Calculer le rang du système de vecteurs

$$((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)).$$

Rang d'un système de vecteurs colonnes

On peut aussi voir la matrice

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

comme un système de trois vecteurs colonnes.

$$\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right).$$

Problème

Selon qu'on met les vecteurs en lignes ou en colonnes, on obtient deux matrices un peu différentes mais pas trop. Ont-elles le même rang ?

Transposée d'une matrice

Pour transposer, on échange les lignes et les colonnes.

Exemple

A gauche une matrice, à droite sa transposée :

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Exo corrigé

Ecrivez la transposée de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Rang et transposition : exemple

Exemple

Les deux systèmes

$$\left\{\begin{array}{l} 8x + 3y + 5z = 0 \\ 2x + 4y + 7z = 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} 8x + 2y = 0 \\ 3x + 4y = 0 \\ 5x + 7y = 0 \end{array}\right.$$

ne se ressemblent pas beaucoup...
mais ils ont le même rang 2.

Rang et transposition

Théorème

Le rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée.

Corollaire

Tout ce qu'on peut faire sur les lignes d'une matrice pour calculer son rang, on peut aussi le faire sur les colonnes.

Exemple

Le rang d'une matrice ne change pas quand on multiplie une de ses colonnes par un nombre non nul.

Rang des systèmes

Finalement une matrice c'est pareil (de deux façons) qu'un système de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et comme on parle de rang d'une matrice, on peut parler de rang d'un système de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Les méthodes de calcul du rang

passent sans changement des matrices aux systèmes de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

On va en profiter pour les passer en revue.

Règles de calcul du rang des systèmes de vecteurs

Le rang d'un système de vecteurs ne change pas

- quand on change l'ordre des vecteurs
- quand on multiplie (ou divise) un vecteur par un nombre non nul
- quand on ajoute (ou retranche) à un vecteur une combinaison des autres
- quand on ajoute (ou retranche) au système un nouveau vecteur qui est combinaison linéaire des anciens.

Le rang d'un système de vecteurs augmente de 1 quand on lui

ajoute un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des autres.

Le rang d'un système de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est égal au nombre de ces vecteurs

sauf si l'un d'entre eux est combinaison linéaire des autres.

Liberté

Définition

On dit qu'un système de vecteurs est libre si le rang du système est égal au nombre de vecteurs.

Un système de vecteurs est libre

ssi aucun de ces vecteurs n'est combinaison linéaire des autres.

Exo corrigé

Est-ce que le système

$$((1,2,3,6),(4,3,2,1),(7,8,0,2))$$

est libre ?

Exo final

Exo final

Est-ce que le système

$$((1,2,3,6),(4,5,6,4),(7,8,9,2))$$

est libre ?