

Résolution des équations linéaires à deux variables

Dédou

Octobre 2012

Equations à deux inconnues ?

Une équations à deux inconnues réelles
c'est quoi ?

Equations à deux inconnues !

Une équation à deux inconnues réelles

c'est deux fonctions, disons p et s , de deux variables réelles (c'est un couple). On ne l'écrit jamais sous la forme couple (p, s) . mais toujours sous la forme encore plus suggestive $p(x, y) = s(x, y)$.

Normalement il faudrait préciser chaque fois que les inconnues sont x et y .

Exemple

$$x^2 + y^2 = 3.$$

Résoudre une équation

Résoudre une équation à deux inconnues

c'est quoi ?

Résoudre une équation à deux inconnues

Résoudre l'équation $p(x, y) = q(x, y)$

c'est calculer l'ensemble de ses solutions

$$\{(x, y) : \mathbb{R} \mid p(x, y) = q(x, y)\}$$

Question ?

Exercice

Exercice

Résoudre l'équation

$$x^2 = y^2.$$

Les inconnues sont x et y .

Fonction linéaire de deux variables ?

Une fonction linéaire de deux variables
c'est quoi ?

Fonction linéaire de deux variables !

Une fonction linéaire de deux variables

c'est une fonction de la forme

$$(x, y) \mapsto ax + by$$

où a et b sont deux nombres réels.

Question ?

Exemple

$$(x, y) \mapsto 3x + 4y$$

est une fonction linéaire de deux variables.

Fonction affine de deux variables ?

Une fonction affine de deux variables
c'est quoi ?

Fonction affine de deux variables !

Une fonction affine de deux variables

c'est une fonction de la forme

$$(x, y) \mapsto ax + by + c$$

où a , b et c sont trois nombres réels.

Exemple

$$(x, y) \mapsto 3x + 4y + 5$$

est une fonction affine de deux variables.

Equation linéaire à deux inconnues ?

Une équation linéaire à deux inconnues
c'est quoi ?

Equation linéaire à deux inconnues !

Une équation linéaire à deux inconnues

c'est une équation à deux inconnues dont les deux membres sont des fonctions affines.

Exemple

$$2x + 3y + 4 = 4x + 5y + 6$$

est une équation linéaire en les deux inconnues x et y .

Equation linéaire (normale)

Une équation linéaire normale à deux inconnues réelles

c'est une équation à deux inconnues réelles dont le premier membre est une fonction linéaire et le second est une constante.

Exemple

$$3x + 2y = 4$$

est une équation linéaire normale à deux inconnues.

Equations équivalentes ?

Deux équations à deux inconnues équivalentes
c'est quoi ?

Equations équivalentes !

Deux équations à deux inconnues sont équivalentes
si elles ont les mêmes solutions.

Exemple ?

Critère d'équivalence

Les deux équations à deux inconnues $p = q$ et $r = s$ sont équivalentes ssi

pour tous réels x et y , on a

$$p(x, y) = q(x, y) \Leftrightarrow r(x, y) = s(x, y).$$

Pour montrer une équivalence entre équations, on montre donc l'équivalence entre les égalités (on peut donc se rendormir, tout va bien).

Normalisation

Toute équation linéaire à deux inconnues
est équivalente à une équation linéaire normale.

Exemple ?

Résoudre une équation linéaire à deux inconnues

Une équation de droite a une infinité de solutions, on ne peut pas toutes les écrire.

Résoudre une équation de droite,
c'est choisir une inconnue qu'on exprime en fonction de l'autre.

On dit que la première est notre inconnue **principale** et que la seconde est notre inconnue **secondaire**.

Sauf que pour les droites horizontales ou verticales, on n'a pas le choix.

Résoudre en y une équation de droite

Exemple

Considérons la droite d'équation

$$2x + 3y + 5 = 0.$$

Cette équation est équivalente à

$$y = -2x/3 - 5/3.$$

C'est l'équation **résolue en y** de cette droite.

Exo 1

Donner l'équation résolue en y de la droite d'équation

$$5x - 3y - 4 = 0.$$

Résoudre en x une équation de droite

Exemple

Considérons de nouveau la droite d'équation

$$2x + 3y + 5 = 0.$$

Cette équation est équivalente à

$$x = -3y/2 - 5/2.$$

C'est l'équation **résolue en** x de cette droite.

Exo 2

Donner l'équation résolue en x de la droite d'équation

$$5x - 3y - 4 = 0.$$

Résoudre une équation de droite : existence

Pour les droites horizontales

on doit prendre y comme inconnue principale.

Exemple

La droite d'équation

$$3y + 4 = 0$$

est horizontale. Son équation résolue en y est

$$y = -\frac{4}{3}.$$

Exo 3

Ecrire une équation résolue de la droite d'équation $4x - 3 = 0$.

Résoudre une équation de droite : unicité

Une droite a au plus

une équation résolue en x et une équation résolue en y .

C'est pour ça qu'on parle de l'équation résolue en x ou l'équation résolue en y d'une droite.

Résoudre une équation de droite avec paramètre I

Exo résolu

Pour quelles valeurs du paramètre m l'équation linéaire à deux inconnues

$$(m + 1)x + (m^2 - 1)y + m = 0$$

définit-elle une droite ?

Réponse

les coefficients $m + 1$ et $m^2 - 1$ de x et y dans l'équation donnée ne s'annulent ensemble que pour $m = -1$. Donc c'est pour $m \neq -1$ que cette équation définit bien une droite.

Résoudre une équation linéaire à deux inconnues avec paramètre II

Exo résolu

Pour les valeurs adéquates du paramètre m , résoudre en y l'équation

$$(m + 1)x + (m^2 - 1)y + m = 0.$$

Réponse

c'est pour m différent de 1 et de -1 que le coefficient $m^2 - 1$ de y dans l'équation est non-nul, et qu'on peut résoudre cette équation en y . Pour ces valeurs de m , on trouve

$$y = -\frac{x}{m - 1} - \frac{m}{m^2 - 1}.$$

Résoudre une équation linéaire à deux inconnues avec paramètre III

Exo 4

- a) Pour quelles valeurs du paramètre m l'équation $(m + 1)x + (m - 1)y + m = 0$ définit-elle une droite ?
- b) Pour les valeurs adéquates du paramètre m , résoudre cette équation en x .

Equation dégénérée I

Exo résolu

Résoudre l'équation

$$(m + 1)x + (m^2 - 1)y + m = 0$$

pour $m = -1$.

Réponse

Pour $m = -1$ l'équation devient $0 = -1$. Elle n'a pas de solution. Autrement dit l'ensemble de ses solutions est vide.

Equation dégénérée II

Exo résolu

Résoudre l'équation

$$(m + 1)x + (m^2 - 1)y + m - 1 = 0$$

pour $m = -1$.

Réponse

Pour $m = -1$ l'équation devient $0 = 0$. L'ensemble de ses solutions est le plan \mathbb{R}^2 tout entier.

Résoudre une équation linéaire à deux inconnues avec paramètre

Exo final

Résoudre, selon la valeur du paramètre m , l'équation

$$(m - 1)x + (m^2 - 1)y + m^3 - 1 = 0.$$