Sous-espaces affines

Dédou

Novembre 2012

Structure de l'ensemble des solutions d'un système homogène

Rappel

On a compris que l'ensemble des solutions d'un système d'équations homogènes est une partie bien particulière du $\mathbb{R}^n$ concerné : c'est **un sous-espace vectoriel**.

Question

Et si les équations ne sont pas homogènes ?

Combiner des solutions d'un système linéaire I

Pas besoin de beaucoup d'équations pour voir ce qui se passe.

Exemple

On considère l'équation linéaire :

$$x + 2y + 2z + 3t = 5.$$

Je vois deux solutions $s_1 := (1, 2, 0, 0)$ et $s_2 := (0, 0, 1, 1)$.
Maintenant je fais une combinaison linéaire au hasard
$s := 3s_1 + 2s_2 = (3, 6, 2, 2)$
et je ne tombe pas sur une nouvelle solution.

Combiner des solutions d'un système linéaire II

On va juste rectifier le tir.

Exemple

On considère toujours l'équation linéaire :

$$x + 2y + 2z + 3t = 5.$$

avec ses deux solutions $s_1 := (1, 2, 0, 0)$ et $s_2 := (0, 0, 1, 1)$.
Cette fois on fait la combinaison linéaire
$s := 3s_1 - 2s_2 = (3, 6, -2, -2)$
et ça marche !

Le truc est que la combinaison linéaire est barycentrique : la somme des coefficients est 1.

Combiner des solutions d'un système linéaire III

Proposition

Soit S un système d'équations linéaire à n inconnues, et soient s et s' (dans $\mathbb{R}^n$) deux solutions de S. Alors toute combinaison linéaire barycentrique de s et s' est encore solution de S.

Ca se démontre...

On le dit un peu autrement

Proposition

L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires à n inconnues est une partie de $\mathbb{R}^n$ qui est stable par passage au barycentre.

Sous-espaces affines : définition

Définition

Dans un espace vectoriel, un sous-espace affine est une partie stable par passage au barycentre.

Sous-espaces affines : exemples

Exemples

Droites de $\mathbb{R}^2$, droites et plans de $\mathbb{R}^3$.

Sous-espaces affines et systèmes linéaires

Proposition

L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires à n inconnues est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$.

Et la réciproque est vraie !

Théorème

Tout sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires à n inconnues.

Translations

Définition

Dans $\mathbb{R}^n$, la translation de vecteur a est l'application $v \mapsto v + a$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + 1, y + 2)$ est la translation de vecteur $(1, 2)$.

Sous-espaces vectoriels et translations I

L'image d'un sous-espace vectoriel par une translation n'est en général pas un sous-espace vectoriel.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, l'image de la droite d'équation $y = x$ par la translation de vecteur $(1, 2)$ est la droite d'équation $y = x + 1$.
Ce n'est pas un sous-espace vectoriel.

Sous-espaces affines et translations II

Proposition

L'image d'un sous-espace vectoriel par une translation est un sous-espace affine.

Et la réciproque est presque vraie !

Théorème

Tout sous-espace affine non vide de $\mathbb{R}^n$ est l'image d'un (unique) sous-espace vectoriel par une translation.

Ca se démontre... mais on prréfère le dire autrement.

Sous-espaces affines parallèles

Définition

On dit que deux sous-espaces affines sont parallèles si l'un est l'image de l'autre par une translation.

Proposition-définition

Tout sous-espace affine non vide de $\mathbb{R}^n$ est parallèle à un unique sous-espace vectoriel. Ce sous-espace vectoriel s'appelle la **direction** du sous-espace affine.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, la direction de la droite d'équation $y = 2x + 3$ est la droite d'équation $y = 2x$.

Cas d'un ensemble de solutions :exemple

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, la direction de la droite d'équation $y + 2x = 3$ est l'équation homogène associée $y + 2x = 0$.

C'est un phénomène général.

Cas d'un ensemble de solutions

Proposition

Soit S un système d'équations linéaires compatible et S_0 le systéme homogène associé. Alors la direction du sous-espace affine des solutions de S est le sous-espace vectoriel des solutions de S_0.

Solution particulière et solution générale

Slogan

On obtient la solution générale d'un système d'équations linéaires (compatible) en ajoutant à une solution particulière la solution générale du système homogène associé.

Pratiquement

Pour spécifier un sous-espace affine (de solutions ?) on en donne un point (origine ?) et une base de la direction.

Repère cartésien

Définition

Un repère cartésien d' un sous-espace affine A est constitué d' un point de A et d'une base de la direction de A.

Exemple

Un repère cartésien du plan d'équation $x + 2y + 3z = 5$ dans $\mathbb{R}^3$ est $((0, 1, 1); (3, 0, -1), (2, -1, 0))$.

Exo corrigé

Exo

Donner un repère cartésien du sous-espace d'équations

$$\begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases}$$

dans $\mathbb{R}^4$.

Exo final

Exo

Donner un repère cartésien du sous-espace d'équations

$$\begin{cases} x + 3y + z + 3t = 1 \\ \;\; x + 2y + z - t = 2 \end{cases}$$

dans $\mathbb{R}^4$.