

Sous-espaces vectoriels : le retour

Dédou

Novembre 2012

A la croisée des chemins algébriques

La notion de sous-espace vectoriel
joue un rôle central en algèbre linéaire.

On en refait le tour.

Une définition (ou plusieurs équivalentes ?)

Définition

Dans un espace vectoriel (\mathbb{R}^n), un sous-espace vectoriel est une partie qui

- contient 0
- est stable par addition
- est stable par multiplication (externe).

Contre-exemples

Dans \mathbb{R}^n , certaines parties ne sont pas des sous-espace vectoriels...

- la partie vide ne contient pas 0 (mais elle est stable par addition et multiplication externe).
- dans \mathbb{R}^2 , le premier quadrant est stable par addition mais pas par multiplication externe.
- dans \mathbb{R}^2 , la réunion du premier et du troisième quadrant est stable par multiplication externe mais pas par addition.

Et ça se dessine.

Constructions de sous-espaces vectoriels

La notion de sous-espace vectoriel est centrale parce qu'elle fédère deux constructions apparemment très différentes.

Qu'on va revisiter.

Proposition

L'ensemble $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$ des combinaisons linéaires d'un système de vecteurs de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Et la réciproque est vraie !

Théorème

Tout sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n est l'ensemble $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$ des combinaisons linéaires d'un système de vecteurs.

Et on peut même préciser cet énoncé...

Théorème

Tout sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n est l'ensemble $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$ des combinaisons linéaires d'un système **libre** de vecteurs.

Autrement dit tout sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n admet une base.

De plus toutes les bases d'un tel sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n ont le même nombre d'éléments.

Par définition :

ce nombre est la dimension du sous-espace vectoriel en question.

Les droites vectorielles sont de dimension 1

Les plans vectoriels sont de dimension 2.

On passe au deuxième mode de construction de sous-espaces vectoriels :

Proposition

L'ensemble des solutions d'un système d'équations homogènes à n inconnues est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

On s'occupera plus loin de la réciproque.

Dimension d'un Ker

Pour un Ker, on a la “formule des dimensions” :

Proposition

La dimension d de l'ensemble des solutions d'un système d'équations homogènes à n inconnues est $n - r$ où r est le rang du système d'équations.

$$d = n - r.$$

On s'occupera plus loin de la réciproque.

On a dit que tout sous-espace vectoriel admet une base :
et dans le cas d'un Ker , la méthode de Gauss permet de trouver une telle base.

Voyons ça de plus près.

- On est dans \mathbb{R}^n ,
- on a un système (e_1, \dots, e_m) d'équations linéaires homogènes et
- on cherche une base du sous-espace vectoriel des solutions $\text{Ker}(e_1, \dots, e_m)$.

La réciproque

Maintenant on revient à la réciproque de notre énoncé :

Proposition

L'ensemble des solutions d'un système d'équations homogènes à n inconnues est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Voici la réciproque :

Théorème

Tout sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n est l'ensemble des solutions d'un système d'équations homogènes à n inconnues.

Et concrètement, on fait comment ?

Exemple résolu

Exo résolu

Trouver un système d'équations homogènes pour le plan $\langle (0, 1, 2, 3), (1, 1, 1, 1) \rangle$ de \mathbb{R}^4 .

Exo 2

Trouver un système d'équations homogènes pour le plan $\langle (1, 2, 3, 4), (0, 1, 1, 1) \rangle$ de \mathbb{R}^4 .