

Sous-espace engendré

Dédou

Novembre 2012

La droite engendrée par un vecteur

Soit v un vecteur de \mathbb{R}^n

L'ensemble des multiples de v constitue une droite, la droite engendrée par v .

Exemple

Le point $(2, 4, -2)$ est sur la droite engendrée par le vecteur $(1, 2, -1)$.

Exo corrigé

Choisissez un vecteur de \mathbb{R}^4 , et indiquez deux points de la droite engendrée par ce vecteur.

Le plan engendré par deux vecteurs

Soit v et w deux vecteurs non proportionnels de \mathbb{R}^n

L'ensemble des combinaisons linéaires de v et w constitue un plan, le plan engendré par v et w .

Exemple

Le point $(2, 4, -3)$ est dans le plan engendré par les vecteurs $(1, 2, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

Exo corrigé

Choisissez deux vecteurs non proportionnels de \mathbb{R}^4 , et indiquez deux points du plan engendré par ces deux vecteurs.

La construction Vect

Définition

Etant donné un système (e_1, \dots, e_m) de vecteurs de \mathbb{R}^n , on note $\text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$ ou encore $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$ l'ensemble des combinaisons linéaires de (e_1, \dots, e_m) :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_m) := \{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}.$$

On dit aussi que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$ est le **sous-espace vectoriel engendré** par (e_1, \dots, e_m) et que les vecteurs (e_1, \dots, e_m) sont des générateurs de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$ ou engendrent $\text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$.

Attention

Les vecteurs (e_1, \dots, e_m) sont **des** générateurs de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$ pas **les** générateurs de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$.

Définition

Une partie de \mathbb{R}^n est un sous-espace vectoriel si elle est de la forme $\text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$, autrement dit $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$, où (e_1, \dots, e_m) est un système de vecteurs de \mathbb{R}^n .

Attention bis

Les vecteurs (e_1, \dots, e_m) sont **des** générateurs de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$ pas **les** générateurs de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$.

Multiplicité des générateurs : exemple

Exemple

Dans \mathbb{R}^3 , les vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(1, -2, 0)$ engendrent le plan d'équation $z = 0$, qui est aussi engendré par les deux vecteurs $(2, 2, 0)$ et $(1, 0, 0)$:

$$\langle (1, 1, 0), (1, -2, 0) \rangle = \langle (2, 2, 0), (1, 0, 0) \rangle .$$

Exo corrigé

Donnez un autre plan de \mathbb{R}^3 et deux systèmes de générateurs de votre plan.

Exemples de Vect

- Dans \mathbb{R}^2 , $\text{Vect}((1, 1))$ est la diagonale, et ça se dessine.
- Dans \mathbb{R}^2 , $\text{Vect}((1, 1), (1, -1))$ est \mathbb{R}^2 tout entier, et ça se dessine.
- Dans \mathbb{R}^3 , $\text{Vect}((1, 1, 0))$ est une droite, et ça se dessine.
- Dans \mathbb{R}^3 , $\text{Vect}((1, 0, 1), (1, 0, 0))$ est le plan d'équation $y = 0$ et ça se dessine.

Exo corrigé

Identifiez le sous-espace $\langle (0, 1, 1), (0, 0 - 3) \rangle$ de \mathbb{R}^3 .

Génération

Définition

On dit que le système (e_1, \dots, e_m) de vecteurs de \mathbb{R}^n est générateur si $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$ est égal à \mathbb{R}^n tout entier.

Exemple

Le système de trois vecteurs $((1, 2), (2, 4), (3, 4))$ de \mathbb{R}^2 est générateur.

Exo corrigé

Donnez un système générateur de quatre vecteurs dans \mathbb{R}^3 .

Hérédité de la génération

Proposition

Tout système dont un sous-système est générateur est lui aussi générateur.

Exemple

Tout vecteur du plan (x, y) est combinaison linéaire de $(1, 0)$ et $(0, 1)$: $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$. A fortiori, tout vecteur du plan est combinaison linéaire de $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$:
 $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) + 0(1, 1)$.

Preuve

Si tout vecteur de notre espace vectoriel est combinaison linéaire des vecteurs du petit système, il l'est a fortiori des vecteurs du grand système : il suffit pour le voir d'affecter les vecteurs superflus du coefficient 0.

Théorème

Pour qu'un système de vecteurs de \mathbb{R}^n soit générateur, il faut et il suffit que son rang soit n .

Exemple

Le système facile $((1, 2, 3), (0, 1, 1), (0, 2, 4))$ est de rang 3 dans \mathbb{R}^3 donc générateur.

Exo corrigé

Le système facile $((1, 2, 3), (1, 1, 1), (0, 2, 4))$ est-il générateur ?

Théorème

L'ensemble des solutions d'un système d'équations homogènes à n inconnues est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Et ça se prouve !

Et en plus la réciproque est vraie !

Théorème

Tout sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n est l'ensemble des solutions d'un système d'équations homogènes à n inconnues.

Exo corrigé

Trouver un système de générateurs du sous-espace des solutions du système :

$$\begin{cases} x = y + u + v \\ z = y - u - v \end{cases}$$

Exo final

Trouver un système de générateurs du sous-espace des solutions du système à quatre inconnues :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$$