

# Systemes trois-deux

Dédou

Octobre 2012

# Mon premier système à trois équations

Résoudre le système aux deux inconnues  $x$  et  $y$  :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \\ 2x - y = -1. \end{cases}$$

c'est calculer l'intersection de trois droites du plan.

## Exo résolu

- Dessinez les trois droites correspondantes sur un même croquis.
- Le système est-il compatible, autrement dit a-t-il une solution ?

## Comment faire un système compatible ?

Si on prend trois droites "au hasard", elles n'auront pas de point commun. Comment faire pour qu'elles en aient un ? Y'a une grosse ficelle :

Je prends deux fois la même équation, ou, à peine plus subtil, je prends deux équations proportionnelles (et la troisième quelconque).

### Exo résolu

Utilisez cette grosse ficelle pour fabriquer un système compatible de trois équations à deux inconnues.

## Une solution plus subtile

Je prends mes deux premières équations  $E_1$  et  $E_2$  "au hasard", par exemple  $x + y = 1$  et  $x - y = 1$  mais pour  $E_3$  je prends une combinaison linéaire de  $E_1$  et  $E_2$  par exemple  $3E_1 - 2E_2$ . J'obtiens le système

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \\ x + 5y = 1. \end{cases}$$

qui est compatible.

# Le premier principe fondamental des systèmes d'équations

Le premier principe fondamental des systèmes d'équations s'énonce comme suit :

On ne change pas les solutions d'un système en lui ajoutant une équation qui est combinaison linéaire des autres.

Evidemment, on peut le formuler à l'envers :

On ne change pas les solutions d'un système en lui retirant une équation qui est combinaison linéaire des autres.

Et même ça se démontre !

# La preuve du premier principe fondamental I

On traite notre cas particulier de deux équations à deux inconnues et de la combinaison linéaire  $E_3 := 3E_1 - 2E_2$ , le cas général est pareil.

On a le système  $S$

$$\begin{cases} A_1(x, y) = A_2(x, y) \\ B_1(x, y) = B_2(x, y) \end{cases}$$

et le système  $S'$

$$\begin{cases} A_1(x, y) = A_2(x, y) \\ B_1(x, y) = B_2(x, y) \\ 3A_1(x, y) - 2B_1(x, y) = 3A_2(x, y) - 2B_2(x, y) \end{cases},$$

et on doit montrer

$$S \Leftrightarrow S'.$$

## La preuve du premier principe fondamental II

Dans un sens,

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1(x, y) = A_2(x, y) \\ B_1(x, y) = B_2(x, y) \\ 3A_1(x, y) - 2B_1(x, y) = 3A_2(x, y) - 2B_2(x, y) \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1(x, y) = A_2(x, y) \\ B_1(x, y) = B_2(x, y) \end{array} \right.$$

on a trois hypothèses et deux conclusions qui sont des hypothèses, trop facile.

## La preuve du premier principe fondamental III

Dans l'autre sens,

$$\begin{cases} A_1(x, y) = A_2(x, y) \\ B_1(x, y) = B_2(x, y) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} A_1(x, y) = A_2(x, y) \\ B_1(x, y) = B_2(x, y) \\ 3A_1(x, y) - 2B_1(x, y) = 3A_2(x, y) - 2B_2(x, y) \end{cases}$$

on a deux hypothèses et trois conclusions dont deux sont des hypothèses. Reste la troisième.



## La preuve du premier principe fondamental IV

$$\begin{cases} A_1(x, y) = A_2(x, y) \\ B_1(x, y) = B_2(x, y) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$3A_1(x, y) - 2B_1(x, y) = 3A_2(x, y) - 2B_2(x, y).$$

Ca se voit bien

(en remplaçant  $A_1(x, y)$  par  $A_2(x, y)$  et  $B_1(x, y)$  par  $B_2(x, y)$ ).

# La réciproque

On a donc trouvé une condition suffisante pour qu'un système de trois équations linéaires à deux inconnues, dont les deux premières ont une solution commune, ait une solution, c'est que la troisième équation soit combinaison linéaire des deux autres.

Et il y a une réciproque :

## Théorème

Si un système de trois équations linéaires à deux inconnues a une solution, alors l'une de ces trois équations est combinaison linéaire des deux autres.

## Quelle est l'équation superflue ?

Donc si notre système de trois équations linéaires à deux inconnues a une solution, l'une de ces trois équations est combinaison linéaire des autres, ok mais laquelle ?

Supposons par exemple que ce soit la seconde,  $E_2$ . On a donc  $E_2 = aE_1 + bE_3$ .

- si  $a$  (resp.  $b$ ) est nul,  $E_2$  et  $E_3$  (resp. et  $E_1$ ) sont proportionnelles.
- si au contraire  $a$  et  $b$  sont non-nuls, alors on a  $E_1 = \frac{1}{a}E_2 - \frac{b}{a}E_3$  et  $E_3 = \frac{1}{b}E_2 - \frac{a}{b}E_1$ .

### Conclusion

Si un système de trois équations linéaires à deux inconnues a une solution, soit deux de ces équations sont proportionnelles ; soit chacune de ces trois équations est combinaison linéaire des deux autres.

## Exo résolu

Le système

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

admet la solution  $(2, 1)$ . Ecrire la première équation comme combinaison linéaire des deux autres.

## Exo final

Le système

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

admet une solution. Ecrire la troisième équation comme combinaison linéaire des deux autres.